Ключи и критерии оценивания
11 класс

Задание 1: Это фаза (8 баллов)

Для наблюдателя в Екатеринбурге (56°50' с.ш.) укажите:

А. В какое время года полная Луна может наблюдаться на наибольшей высоте?

Б. Для каждой из приведенных ниже фаз Луны приведите время года, в которое эта фаза может находиться на наибольшей высоте.

Пример ответа: *«1 зима 2 лето 3 осень»*

№	**1**	**2**	**3**
Фаза	Последняя четверть	Новолуние	Первая четверть

В. Чему равна наибольшая высота Луны в Екатеринбурге? Ответ приведите с точностью до целых минут.

Решение:

А. В суточном движении светило наблюдается на наибольшей высоте в момент его верхней кульминации. Если склонение светила в течение года меняется, то наибольшей за год высоты светило достигнет, когда его склонение окажется наибольшим (но не больше широты места наблюдения).

Движение Луны сложное. С периодом в один месяц она движется по орбите, наклоненной к эклиптике под углом $i = 5°09'$, и пересекающейся с эклиптикой в точках (узлах), движущихся по эклиптике с периодом **18,6 лет**. Рассуждения относительно времени года нужной фазы можно упростить, так как наклон экватора к эклиптике $\varepsilon = 23°26'$ заметно больше наклона лунной орбиты i, т.е. можно считать Луну обращающейся точно в плоскости эклиптики. Для подчета максимальной высоты наклон i уже придется учесть.

Фаза Луны определяется разницей эклиптических долгот Луны и Солнца - полнолуние происходит во время противостояния Луны и Солнца друг другу. В свою очередь, положение Солнца на эклиптике позволяет однозначно определить время года, поскольку период обращения Солнца по эклиптике есть величина периода изменения времен года, а именно тропического года.

Наибольшего склонения Солнца достигает летом, когда проходит точку Рака, или точку летнего солнцестояния. Соответственно, любое тело на эклиптике будет иметь наибольшее склонение, когда будет находиться в этой же точке.

Вывод: если нам хочется наблюдать полную Луну на наибольшей высоте, она должна находиться в точке Рака, а Солнце, соответственно, в диаметрально противоположной точке Козерога, или точке зимнего солнцестояния. То есть полная Луна наблюдается на наибольшей высоте в Екатеринбурге (и во всем в северном полушарии) **зимой.**

Б. Продолжая рассуждения, аналогичные пункту А, можно заключить, что Луна независимо от фазы должна находиться в точке летнего солнцестояния, чтобы быть на наибольшей высоте.

В новолуние положение Луны и Солнца совпадает –**лето**;

В последнюю четверть Солнце на 90° опережает Луну по эклиптике – Солнце в точке осеннего равноденствия, **осень**;

В первую четверть Солнце отстает от Луны на 90° по эклиптике –**весна.**

В. По формуле для определения высоты светила в верхней кульминации к югу (можно сделать рисунок), «эклиптическая Луна» имеет наибольшую высоту, равную наибольшей высоте Солнца в день летнего солнцестояния:

$$h' = 90° - \varphi + \varepsilon = 56°36'$$

Однако, реальная орбита Луны наклонена к эклиптике. По этой причине, в течение периода прецессии лунных узлов склонение Луны может быть любым в диапазоне от $-\varepsilon - i$ до $+\varepsilon + i$ (в случае, когда восходящий узел лунной орбиты совпадает с восходящим узлом эклиптики относительно экватора). Наибольшее значение будет больше склонения Луны ровно на этот наклон i:

$$h = h' + i = 61°45'$$

Ответы: **А.** зима **Б.** 1 осень 2 лето 3 весна **В.** 61°45′

Оценивание

Пункт	**Критерий**	**Баллы**
А1	Участник привел в решении правильный ответ: **зима**	**1**
А2	Участник привел корректное пояснение к ответу, основываясь на закономерностях движений Солнца и Луны	**2**
Б1	Есть правильный ответ **(1 осень 2 лето 3 весна)**	**3**
В1	Участник использовал корректную формулу верхней кульминации к югу от зенита: $h = 90° - \varphi + \delta$	**1**
В2	Участник учел наклон орбиты Луны к эклиптике и получил правильный ответ для высоты: $61°45'$	**1**
	Итого:	**8**

Если отсутствует учет наклона орбиты Луны к эклиптике, то максимальная оценка за задачу – 7 баллов

Задание 2: Ядро над головой (8 баллов)

В некоторой точке пространства наблюдается нейтронная звезда одной солнечной массы и радиусом 10 км. Звезда имеет угловой размер такой же, как Солнце, видимое с Земли.

А. Какова средняя плотность этой нейтронной звезды в кг/м^3?

Б. Во сколько раз расстояние от нейтронной звезды до точки наблюдения меньше, чем расстояние от Луны до Земли?

В. Какова разница между гравитационным ускорением, действующим со стороны нейтронной звезды на голову гипотетического наблюдателя в этой точке, и гравитационного ускорения, действующего на его ноги, если рост наблюдателя составляет 2 м, а нейтронная звезда «висит» прямо над его головой? Выразите эту разницу **в целых g** (нормальное ускорение свободного падения на Земле).

Решение: введем обозначения:

Расстояние от Земли до Солнца $d_s = 1.496 \times 10^{11}$ м, радиус Солнца $R_s = 6.97 \times 10^8$ м, масса Солнца $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ кг.

Расстояние от Луны до Земли $d_m = 384\,400\,000$ м, радиус Луны $R_m = 1\,738$ км;

Расстояние от Земли до нейтронной звезды d, её радиус R.

Численные значения радиусов и масс возьмем из справочных данных. В качестве расстояний возьмем средние расстояния или большие полуоси орбит.

А. Можно сразу же подставить величины в формулу средней плотности для сферического тела:

$$\rho = \frac{3M_\odot}{4\pi R^3} = \frac{3 \times 1.989 \times 10^{30}\text{кг}}{4 \times 3.1416 \times (10\,000\text{ м})^3} = 5 \times 10^{17}\ \text{кг/м}^3.$$

Б. Из равенства угловых размеров Солнца, видимого с Земли, и нейтронной звезды, а также из определения углового размера:

$$\frac{R}{d} = \frac{R_s}{d_s} \rightarrow d = \frac{R}{R_s} \times d_s$$

Определим расстояние до нейтронной звезды d – оно нам пригодится для ответа на следующий вопрос задачи:

$$d = \frac{10}{697\,000} \times 149\,600\,000\text{ км} = 2\,146{,}341\text{ км}.$$

Можно и сразу получить искомое отношение через входные величины:

$$x = \frac{d_m}{d} = \frac{d_m}{d_s} \times \frac{R_s}{R} = \frac{384400}{149600000} \times \frac{697000}{10} = 179\text{ раз}.$$

Если считать, что угловые размеры Солнца примерно равны угловым размерам Луны, отношение получится меньшим (но не сильно):

$$\frac{R_m}{d_m} \approx \frac{R_s}{d_s} \rightarrow R_m \approx d_m \times \frac{R_s}{d_s},$$

$$x = \frac{d_m}{d} = \frac{d_m}{d_s} \times \frac{R_s}{R} \approx \frac{R_m}{R} = \frac{1738}{10} = 175\text{ раз}.$$

Любой вариант расчета сгодится, ведь в условиях задачи нам не сообщают конкретную конфигурацию орбит Земли и Луны и положение наблюдателя на

Земле.

В. Нейтронная звезда на расстоянии r от её центра (много большего, чем её радиус) оказывает на любое тело следующее (по модулю) гравитационное ускорение:

$$g(r) = \frac{GM_\odot}{r^2}$$

Необходимо найти приращение ускорения $\Delta g = g(d) - g(d+h)$, где $h = 2$ м – рост наблюдателя. Сделать это можно непосредственным счетом:

$$\Delta g = 6{,}672 \times 10^{-11} \times 1{,}989 \times 10^{30}\ \text{м}^3/\text{с}^2 \times \left(\frac{1}{(2146341\text{м})^2} - \frac{1}{(2146341\ \text{м} + 2\ \text{м})^2}\right) \approx 53{,}7\ \ \text{м}/\text{с}^2$$

Но можно воспользоваться той же техникой, что используется при расчете приливного ускорения: использовать малость отношения $\frac{h}{d}$ (или, что аналогично, воспользоваться приближенным равенством производной функции и отношения конечных приращений $\frac{dg}{dr} \approx \frac{\Delta g}{\Delta r}, \Delta r = -h$:

$$\Delta g = GM_\odot\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(d+h)^2}\right) = \frac{GM_\odot}{d^2}\left(\frac{\left(1+\frac{h}{d}\right)^2 - 1}{\left(1+\frac{h}{d}\right)^2}\right) = h\frac{GM_\odot}{d^3}\left(\frac{2+\frac{h}{d}}{\left(1+\frac{h}{d}\right)^2}\right) \approx \frac{2GM_\odot}{d^3} \times h = \frac{dg}{dr} \times \Delta r;$$

$$\Delta g = \frac{2 \times 6{,}672 \times 10^{-11} \times 1{,}989 \times 10^{30}\ \text{м}^3/\text{с}^2}{(2\ 146\ 341\ \text{м})^3} \times 2\text{м} \approx 53{,}7\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Такой величины перегрузки больше чем **в 5 раз** превышают нормальное ускорение свободного падения $g = 9{,}81\ \text{м}/\text{с}^2$. Такие же перегрузки испытывают космонавты при спуске с Международной космической станции.

Ответы:

А. $5{\times}10^{17}$ кг/м^3

Б. в 175 раз;

В. 5 g.

Оценивание

Пункт	**Критерий**	**Баллы**
А1	Приведена правильная формула для средней плотности нейтронной звезды	1
А2	Приведен правильный ответ в диапазоне **от 4 до 6 ×10^{17} кг/м^3**	1
Б1	Приведена или использована в неявном виде правильная формула углового размера как отношения линейного размера и расстояния до тела	1
Б2	Приведен правильный ответ в диапазоне **от 160 до 180 раз**	1
В1	Приведена правильная формула для гравитационного ускорения	2
В2	Приведен правильный ответ в диапазоне **от 4 до 5 g**	2
	Итого:	**8**

Если в финальном ответе присутствует лишний знак "минус", лишние знаки после запятой или другие единицы измерения, участник штрафуется не более, чем на 1 балл ***при численно правильном ответе без учета знака/округления.***

Задание 3: Меридианное путешествие (8 баллов)

Путешественник, стартуя из Кении возле экваториальной точки на долготе 40°, отправляется на северный полюс. Минуя Красное и Черное море, в конечном итоге он оказывается под Ярославлем на той же самой долготе в некотором пункте. Пренебрегая полярным сжатием Земли и считая её шаром с радиусом$R = 6378$км, найдите:

А. Широту пункта в градусах и минутах **с точностью до десятых долей минут**, если известно, что путешественник сместился по поверхности Земли ровно на один её радиус.

Б. Угловое расстояние **с точностью до целых минут дуги** между путешественником в этот момент и Ярославлем (57°37' N, 39°51' E).

В. Временную задержку между испусканием сигнала геостационарным спутником и его приемом путешественником в этом пункте **с точностью до миллисекунды**, если геостационарный спутник висит на той же долготе. Взаимодействием сигнала с атмосферой пренебрегите.

Решение:

А. Если путешественник сместился на север от экватора на дугу, равную одному радиусу Земли, то эта дуга опирается на центральный угол ровно в 1 радиан. Так как начало отсчета широт совпадает с начальной точкой путешествия, искомая широта $\varphi = 1\text{рад} \approx 57°17{,}7'$.

Б. Путешественник находится в точке с географическими координатами $(\varphi = 57°17{,}7', \lambda = 40°)$. Расстояние до точки $(\varphi_0 = 57°37', \lambda_0 = 39°51')$ с удовлетворительной точностью можно с помощью теоремы Пифагора, поскольку это две близкие точки:

$$\Delta = \sqrt{(20')^2 + (9')^2} \approx 22'.$$

Если посчитать дугу по формулам сферической тригонометрии, получится немного меньшее число:

$$\Delta = arccos\left(sin\varphi \times sin\varphi_0 + cos\varphi \times cos\varphi_0 \times cos(\lambda - \lambda_0)\right) \approx 20'$$

В. Временная задержка сигнала t объясняется конечной скоростью распространения радиоволн. Радиоволны движутся со скоростью света $c = 2{,}998 \times 10^8$ м$/c$, поэтому, если мы найдем расстояние от спутника до пункта наблюдения d, тогда $t = d/c$.

Геостационарный спутник движется в плоскости земного экватора с периодом, равным периоду осевого вращения Земли $T = 86164$ секунды. Радиус его орбиты r участник может как знать наизусть, так и высчитать из обобщенного III закона Кеплера:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2},$$

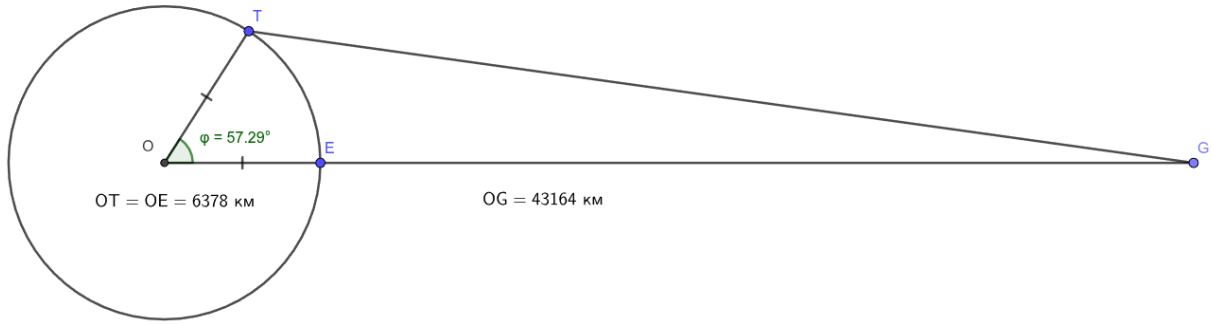
$$r = \left(GM \times \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right)^{1/3} \approx 42\,163{,}6 \text{ км}.$$

Можно также использовать III закон через сравнение с Луной:

$$r = r_m \times \left(\frac{T}{T_m}\right)^{2/3} = 384400 \text{ км} \times \left(\frac{86\,164}{27{,}3217 \times 86400 \text{ с}}\right)^{2/3} \approx 42\,298 \text{ км}.$$

Разные значения радиуса орбиты не повлияют существенно на итоговый ответ.

Нарисуем плоскость меридиана 40°, обозначив точкой O центр Земли, точкой T место путешественника, точкой G место геостационарного спутника и точкой E – подспутниковую точку на экваторе. В треугольнике OTG нам известны две стороны и угол между ними, а d = – искомое расстояние.



Его можно найти через теорему косинусов для плоского треугольника:

$$d = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi} \approx 39\,100 \text{ км},$$

Окончательно, итоговый ответ:

$$t = d/c = 130 \text{ мс}.$$

Ответы:

А. 57°17,7'

Б. 20'

В. 130 мс.

Оценивание

Пункт	**Критерий**	**Баллы**
А1	Использовано определение радиана и/или угол в градусах вычислен через пропорцию	**1**
А2	Корректно округлен и приведен ответ: 57°17,4'	**1**
Б1	Вычислено угловое расстояние с помощью теоремы Пифагора или формулы сферической тригонометрии	**1**
Б2	Приведено округленное до целых минут значение, лежащее в диапазоне **от 19 до 23 угловых минут**	**1**
В1	Приведен или вычислен радиус орбиты геостационарного спутника в диапазоне **42100-42300 км**	**1**
В2	Корректно выстроена геометрия задачи с помощью рисунка или непосредственно сразу через теорему косинусов	**2**
В3	Итоговый ответ лежит в диапазоне **129-131 мс**	**1**
	Итого:	**8**

Задание 4: Династия затмений (8 баллов)

В настоящее время большая полуось орбиты Луны составляет 384 400 км, и, благодаря её эксцентриситету, мы можем наблюдать как кольцеобразные, так и полные солнечные затмения. Считая орбиту Земли и эксцентриситет орбиты Луны неизменными, а большая полуось орбиты Луны всё время увеличивалась и продолжает увеличиваться с постоянной скоростью 4 см в год, ответьте на следующие вопросы.

А. Когда люди больше не смогут наблюдать полное солнечное затмение с поверхности Земли?

Б. Когда с поверхности Земли можно было впервые пронаблюдать центральное кольцеобразное солнечное затмение?

В. По оптимистичным моделям, Земля будет сохранять условия для существования живых организмов ещё в течение 2 млрд лет, что суммарно с 4 млрд лет текущего существования дает примерно 6 млрд лет возможного существования жизни на Земле. Какую долю от этого промежутка времени составляет «окно» возможного наблюдения как полных, так и кольцеобразных затмений?

Радиус Земли принять равным $R = 6\,378$ км.

Решение:

Текущие параметры орбит

1) Луны:

$$a = 384\,400 \text{ км}, e = 0{,}055$$

2) Земли:

$$a_{\text{Земли}} = 1{,}496 \times 10^8 \text{ км}, e_{\text{Земли}} = 0{,}0167$$

А. Для наблюдения полного затмения необходимо точное совпадение углового диаметра Луны и углового диаметра Солнца. Оба угловых диаметра варьируются в размерах из-за эллиптичности орбит, а также из-за положения наблюдателя.

Последнее наблюдение полного затмения произойдет, когда **наибольший возможный за её орбитальное движение** угловой размер Луны при наблюдении с поверхности Земли станет равным **наименьшему** угловому размеру Солнца.

Средний угловой диаметр Солнца можно найти (или помнить наизусть):

$$\alpha \approx 32', \alpha = \frac{2R_{\text{Солнца}}}{a_{\text{Земли}}} = \frac{2 \times 6{,}97 \times 10^5 \text{км}}{1{,}496 \times 10^8 \text{км}} = 9{,}318 \times 10^{-3} \text{рад}$$

Из-за эксцентриситета орбиты Земли этот угловой размер меняется:

$$\alpha_{min} = \frac{\alpha}{1 + e_{\text{Земли}}} = 9{,}165 \times 10^{-3} \text{рад},$$

$$\alpha_{max} = \frac{\alpha}{1 - e_{\text{Земли}}} = 9{,}476 \times 10^{-3} \text{рад},$$

Учет положения наблюдателя не изменит эти размеры вплоть до третьего знака после запятой.

Луна имеет радиус $R = 1\,738$км и будет иметь такой угловой размер с расстояния $d_1 = 2\,R/\alpha_{min} = 379\,269$км.

Наибольший угловой размер Луна имеет **в перицентре орбиты** для наблюдателя, у которого Луна в зените. Если Луна будет на таком расстоянии от **поверхности Земли** в перицентре орбиты, то большая полуось её орбиты будет равна $a_1 = (d_1 + R_{\text{Земли}})/(1-e) = 408\,092$ км.

При увеличении большой полуоси со скоростью

$$v = 4 \text{ см/год} \approx 400 \text{ км за } 10 \text{ млн лет},$$

такая ситуация наступит через $T_1 = (a_1 - a)/v = 590$ **млн лет.**

Б. Кольцеобразное затмение наступает, если угловой размер Луны меньше углового размера Солнца.

Первое такое затмение произошло, когда **наименьший** угловой размер Луны стал меньше, чем **наибольший** угловой размер Солнца.

Расстояние до Луны, чтобы она имела наибольший угловой размер Солнца $d_2 = 2\,R/\alpha_{max} = 366\,800$ км

Наименьший угловой размер Луны будет в апоцентре её орбиты для «полярного» наблюдателя, видящего её на горизонте (что недалеко от наблюдателя, который находится в центре Земли).

Большая полуось Луны в тот момент была равна $a_2 = d_2/(1+e) = 347\,700$ км. Это было $T_2 = (a - a_2)/v = 920$ **млн лет назад.**

В. Всего «окно» наблюдений составляет $(T_1 + T_2)/$ 6 млрд лет = **27%** от общего времени существования жизни. Нам повезло жить в такой удачный промежуток времени!

Ответы:
А. Через 590 млн лет
Б. 920 млн лет назад
В. 27%

Оценивание

Пункт	**Критерий**	**Баллы**
А1	Указано или используется понимание того, когда возникают полные затмения	**1**
А2	Учтен фактор эллиптичности орбиты Земли в изменении угловых размеров Солнца (в расчетах присутствует эксцентриситет орбиты Земли)	**1**
А3	Учтен фактор эллиптичности орбиты Луны в изменении её видимых угловых размеров (в расчетах присутствует эксцентриситет Луны)	**1**
А4	Учтен фактор положения наблюдателя Луны на Земле (в расчетах присутствует радиус Земли)	**1**
А5	Ответ на пункт А заключен в диапазоне **от 400 до 650 млн лет**	**1**
Б1	Указано или используется понимание того, когда возникают	**1**

	кольцеобразные затмения	
Б2	Использован наибольший угловой размер Солнца и дан ответ на пункт Б в диапазоне **от 800 до 1000 млн лет**	**1**
В1	Дан ответ на пункт В в диапазоне **от 0.15 до 0.29 (от 15% до 29%)**	**1**
	Итого:	**8**

Примечания:

Если участник решил задачу с помощью нахождения длины тени, получая аналогичные значения с точностью до 100 млн лет, задача засчитывается в полном объёме.

Задание 5: Дорогоугольники (8 баллов)

В Чили строится Чрезвычайно большой телескоп (ELT) диаметром 39,4 м. Его главное зеркало будет состоять из 798 одинаковых шестиугольных зеркал-сегментов и стоит 400 млн евро. Пренебрегая размерами отверстия под вторичное зеркало, отличиями шестиугольника от круга и считая, что стоимость зеркала пропорциональна его диаметру в кубе, найдите:

А. На сколько дороже вышел бы телескоп, если бы его не делили не сегменты, а отлили бы цельное главное зеркало?

Б. Чему была бы равна проницающая способность при визуальных наблюдениях глаза для всего телескопа и одного сегмента?

В. Какова проницающая способность телескопа, у которого цельное главное зеркало стоимостью 100 млн евро?

Решение:

А. Один сегмент стоит 400/798 **≈** 0,501 млн = 501 тысяча евро. Его площадь в 798 раз меньше всего зеркала, тогда его диаметр меньше в $\sqrt{798} \approx 28{,}2$ раза и равен 1,4 м.

Цельное зеркало стоит в $28{,}2^3 \approx 22426$ раз дороже одного сегмента составного зеркала, что составляет примерно 11,2 млрд евро. Это **на 10,8 млрд евро** дороже составного зеркала!

Б. Проницающая способность (или проницающая сила) оптического телескопа есть максимальная звездная величина m у звезд, видимых в этот телескоп глазом. Для телескопа с диаметром главного зеркала D её можно оценить по следующей формуле:

$$m = m_{\text{глаз}} + 5lg\left(\frac{D}{d_{\text{глаз}}}\right),$$

где $d_{\text{глаз}}$ – диаметр зрачка в темноте, а $m_{\text{глаз}}$ – предельная звездная величина звезд, видных невооруженным глазом.

Разные источники (разные глаза, разное небо...) используют разные значения для параметров глаза, мы примем для вычисления $d_{\text{глаз}} = 6$мм и $m_{\text{глаз}} = 6^m$ – участник может использовать иные, близкие к этим значениям величины.

Итоговое значение в любом случае будет очень приблизительным и округленным до целой величины.

Посчитаем проницающую силу для целого зеркала и одного сегмента:

$$m_1 = 6^m + 5lg\left(\frac{39400}{6}\right) = 25^m,$$

$$m_2 = 6^m + 5lg\left(\frac{39\,400/28{,}2}{6}\right) = 18^m.$$

В. Как было посчитано ранее, цельное зеркало диаметром 39,4 м имело бы стоимость 11,2 млрд. Зеркало стоимостью 100 млн дешевле в $\frac{11200}{100} = 112$ раз, а его диаметр меньше в $\sqrt[3]{112} = 4{,}8$ раз. Тогда его проницающая способность

$$m_3 = 6^m + 5lg\left(\frac{39\,400/4{,}8}{6}\right) = 22^m.$$

Ответы:

А. На 10,8 млрд евро дороже

Б. 25^m и 18^m

В. 22^m

Оценивание

Пункт	**Критерий**	**Баллы**
А1	Найдена (возможно, неявно) стоимость сегмента зеркала: **500 тысяч евро**	**1**
А2	Найдена стоимость цельного зеркала: **11,2 млрд евро**	**1**
А3	Приведена разница с составным зеркалом: **10,8 млрд евро**	**1**
Б1	Приведена и/или использована формула проницающей способности $m = m_{\text{глаз}} + 5lg\left(\frac{D}{d_{\text{глаз}}}\right)$	**1**
Б2	Использованы адекватные значения для $m_{\text{глаз}}$ и $d_{\text{глаз}}$	**1**
Б3	Приведена подсчитанная проницающая способность цельного зеркала в диапазоне **от 24 до 26 звездной величины**	**1**
Б4	Приведена подсчитанная проницающая способность сегмента зеркала в диапазоне **от 17 до 19 звездной величины**	**1**
В1	Приведена подсчитанная проницающая способность зеркала за 100 млн евро в диапазоне **от 21 до 23 звездной величины**	**1**
	Итого:	**8**

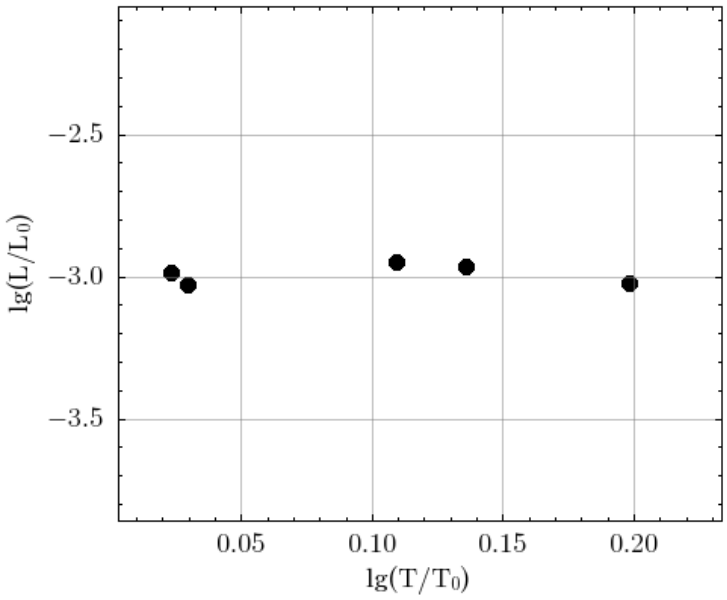
Задание 6: Светочи (8 баллов)

На графике представлена выборка из 5 звезд одного класса светимости в виде диаграммы рассеяния в координатах «логарифм температуры — логарифм светимости» в солнечных единицах температуры T_0 и светимости L_0.

А. Почему на этом графике большая температура не соответствует большей светимости, как следует из закона Стефана-Больцмана?

Б. Найдите светимость (в светимостях Солнца), температуру (в К) и радиус (в км) самой горячей из этих звезд.

В. Предположим, мы построили новый график, используя те же звезды, но заменив отношение светимостей L/L_0 на отношение радиусов R/R_0, где R_0 — радиус Солнца. На старом графике все звезды хорошо ложатся на прямую, параллельную оси абсцисс, то есть угол между этой прямой и осью абсцисс равен нулю. Найдите значение этого угла **в градусах** на новом графике. Масштабы по осям одинаковые.



Решение:

А. По закону Стефана-Больцмана, большая температура соответствует большей светимости **при том же радиусе**:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

На графике представлена выборка **разных** звезд, которые могут обладать **разными радиусами.** Более горячие звезды могут иметь соответственно меньшие радиусы, не противореча закону Стефана-Больцмана.

Б. Снимаем с графика значения $lg(L/L_0) = -3$, откуда $L/L_0 = 10^{-3}$, L = 0,001 светимостей Солнца. $lg(T/T_0) = 0.2$, $T = T_0 \times 10^{0,2} = 9200K$,

Из закона Стефана-Больцмана можно получить радиус, используя постоянную Стефана-Больцмана и значение светимости Солнца в ваттах:

$$R = T^2 \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma}}$$

Но можно и переформулировать формулу в безразмерном виде, поделив закон в общей форме на него же для Солнца:

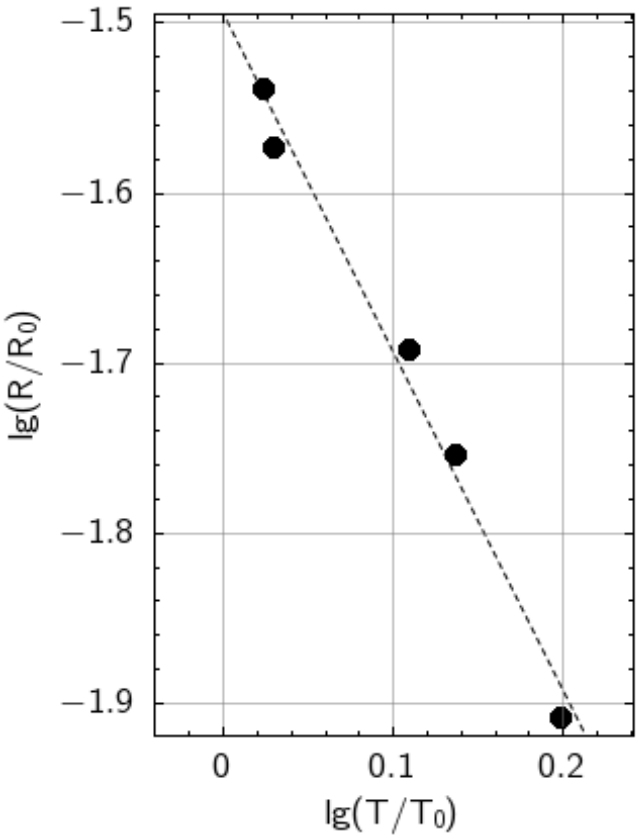
$$L_0 = 4\pi {R_0}^2 \sigma {T_0}^4,$$

получив в итоге

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4,$$

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-2} \sqrt{\frac{L}{L_0}} = 10^{-0,4-1,5} = 10^{-1,9} \approx 0{,}0126,$$

$$R = 697\,000 \times 0{,}0126 = 8\,800 \text{ км}.$$



В. Для ответа на этот вопрос возьмем десятичный логарифм от выражения из пункта Б:

$$lg\frac{R}{R_0} = (-2) \times lg\frac{T}{T_0} + \frac{1}{2} \times lg\frac{L}{L_0}$$

Это уравнение прямой вида

$$y = k \times x + b,$$

ведь в нашем случае $b = lg\frac{L}{L_0} \approx const$.Тангенс искомого угла наклона α $k = -2$, откуда

$$\alpha = arctan(-2) = 116{,}6° \text{ или } 63{,}4°.$$

Итоговый график с линией тренда показан справа. Строить его **необязательно,** однако, участник может решить текущий пункт и получить приближенное к $arctan(-2)$ значение с помощью непосредственного построения (если у него много свободного времени).

Ответы:

А. светимость зависит от радиуса звезды, радиусы звезд разные

Б. 8 800 км

В. 63,4° или 116,6°

Оценивание

Пункт	**Критерий**	**Баллы**
А1	В ответе фигурирует причина – наличие в формуле Стефана-Больцмана для светимости помимо температуры **радиуса**	**1**
А2	В ответе фигурирует причина – **различие радиусов звезд**	**1**
Б1	Правильно сняты значения с графика: $lg(L/L_0) = -3$, $lg(T/T_0) = 0.2$ **без избыточной точности**	**1**
Б2	Указан правильный ответ для радиуса в диапазоне **8700-9000 км**	**1**
В1	Участник явно или неявно связал искомый угол с угловым коэффициентом прямой с точками выборки	**2**
В2	С помощью анализа формул **или** С помощью анализа построенного графика "логарифм радиуса от логарифма температуры" участник приходит к углу, близкому к $arctan(\pm 2)$	**1**
В3	Получен ответ в градусах в диапазоне **от 116° до 119°** или **от 61° до 64°**	**1**
	Итого:	**8**