1 ?? Определите скорость движения втулки в начальный момент времени, когда колечко движется вблизи вершины прямого угла.

За небольшое время Δt колечко пройдет расстояние $v\Delta t$, оставив позади себя кусочек нити длиной $v\Delta t$. Такой же по длине кусочек нити должен освободиться из-за приближения втулки к колечку. Значит, $u(0)\Delta t = v\Delta t$, и:

Ответ:

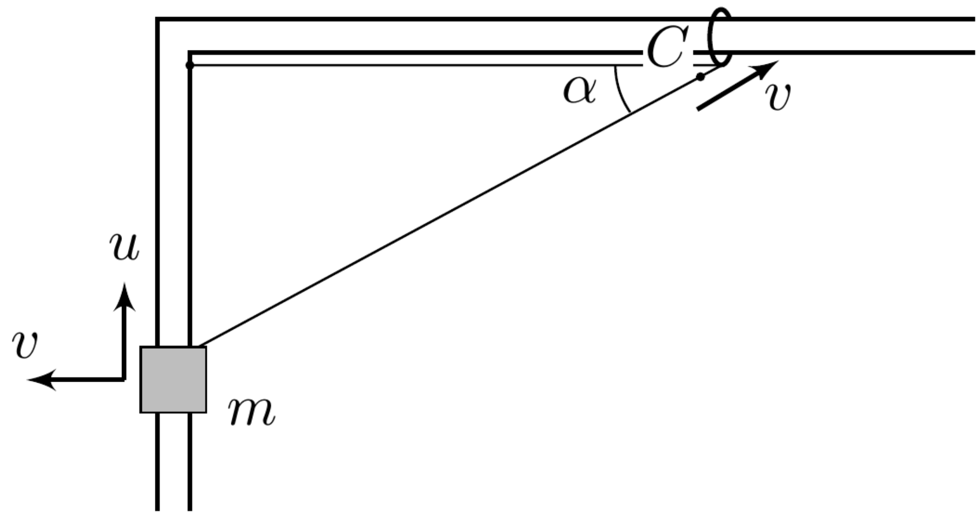
$$u(0) = v.$$

2 ?? Как зависит скорость движения втулки от угла α?

Способ 1

Перейдем в систему отсчета, связанную с колечком. В этой СО колечко неподвижно, а у втулки появляется составляющая скорости, перпендикулярная стержню (см. рисунок). При этом относительно точки C, выбранной вблизи колечка, втулка движется по окружности. Проекции скоростей втулки и точки C на направление участка нити между втулкой и кольцом должны компенсировать друг друга так, чтобы длина этого участка оставалась постоянной. Точка C движется со скоростью v, поэтому:

$$v = u\sin\alpha - v\cos\alpha.$$



Способ 2

Пусть расстояния от вершины прямого угла до колечка и до втулки равны соответственно x и y. Тогда запишем полную длину нити следующим образом:

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = l.$$

Возьмём производную по времени:

$$\dot{x} + \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dot{l} = 0;$$

$$\dot{y} = -\frac{\dot{x}}{y}(\sqrt{x^2 + y^2} + x);$$

$$u = \frac{v}{y}(\sqrt{x^2 + y^2} + x).$$

$$u = v(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}) = v\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Способ 3

Рассмотрим маленький промежуток времени Δt. Колечко прошло расстояние $v\Delta t$, а втулка $u\Delta t$. Проецируя эти перемещения на отрезок, соединяющий колечко с ниткой, получим маленькое изменение длины куска нити между ними:

$$\Delta R = v\Delta t\cos\alpha - u\Delta t\sin\alpha$$

Кусок нити между вершиной прямого угла и колечком увеличился на $v\Delta t$. Так как полная длина нити не меняется:

$$(v\cos\alpha - u\sin\alpha + v)\Delta t = 0$$

Откуда:

Ответ:

$$u = v\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

3 ?? Чтобы колечко двигалось с постоянной скоростью v, к нему прикладывают силу F, направленную вдоль стержня. Как зависит сила F от угла α?

Способ 1

Скорость втулки при её движении по окружности относительно точки C равна:

$$v\sin\alpha + u\cos\alpha = v\frac{\sin^2\alpha + \cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha} = v\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Нормальная компонента ускорения:

$$a_n = \frac{v^2(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha\cdot R},$$

где $R = \frac{l}{1+\cos\alpha}$ — длина участка нити между втулкой и точкой C.

Полное ускорение втулки a направлено вдоль стержня, а a_n является его проекцией на нить. Поэтому

$$a = \frac{a_n}{\sin\alpha} = \frac{v^2(1+\cos\alpha)^3}{\sin^3\alpha\cdot l}.$$

Способ 2

Воспользуемся полученной в предыдущем пункте связью u и v:

$$u = \frac{v}{y}(\sqrt{x^2+y^2}+x) = v\frac{l}{y}.$$

Возьмём производную по времени от этого выражения:

$$a = -vl\frac{\dot{y}}{y^2} = \frac{v^2l^2}{y^3}.$$

Так как нить нерастяжима:

$$l = \frac{y}{\sin\alpha} + \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow y = \frac{l\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Тогда:

$$a = \frac{v^2(1+\cos\alpha)^3}{\sin^3\alpha\cdot l}.$$

Далее $ma = T\sin\alpha$, откуда

$$T = m\frac{v^2(1+\cos\alpha)^3}{\sin^4\alpha\cdot l}$$

Сила F, прикладываемая к колечку, равна сумме проекций двух сил натяжения на стержень:

$$F = T + T\cos\alpha.$$

Ответ:

$$F = m\frac{v^2(1+\cos\alpha)^4}{l\sin^4\alpha}$$

Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.