1 ?? Существуют ли точки на столешнице, в которых можно разместить центр основания вазы с букетом так, чтобы столешница была горизонтальна?

Разместим вазу на столе и расставим силы, действующие на систему «столешница + ваза». Сила тяжести столешницы Mg приложена к центру столешницы, сила тяжести вазы mg приложена в точке расположения вазы. Эти силы направлены вертикально вниз. Три силы реакции ножек N_1, N_2 и N_3 направлены вертикально вверх. Сила реакции четвертой ножки должна быть равна нулю.

Способ 1

Сделаем рисунок столешницы с видом сверху и введем систему координат XOY, начало координат поместим в центр столешницы (см. Рис. 3). Координаты точки, в которой находится ваза, обозначим x и y. На рисунке силы реакции ножек направлены перпендикулярно плоскости чертежа, на читателя, и обозначены черными кружками, а силы тяжести направлены перпендикулярно плоскости чертежа, от читателя и обозначены крестиками.

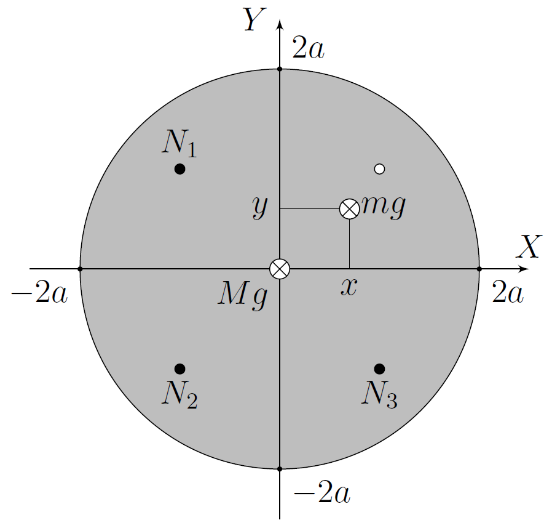

Рис. 3

Запишем условие равновесия системы:

$$(M+m)g = N_1 + N_2 + N_3, \tag{1}$$

правило моментов для оси OX:

$$N_1 a = mgy + N_2 a + N_3 a, \tag{2}$$

И правило моментов для оси OY:

$$N_3 a = mgx + N_1 a + N_2 a. \tag{3}$$

Подставим (2) в (3) и найдем N_2:

$$N_2 = -\frac{mg}{2a}(x+y).$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие $N_2 \geq 0$,
а для этого должно выполняться условие $y + x \leq 0$ или

$$y \leq -x. \tag{4}$$

Из уравнения (3) выразим N_3:

$$N_3 = mg\frac{x}{a} + N_1 + N_2.$$

Подставим N_3 и N_2 в (1) и определим N_1:

$$N_1 = \frac{M+m}{2}g + \frac{mg}{2a}y.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие

$$N_1 \geq 0,$$

следовательно, должно выполняться

$$\frac{M+m}{2}g + \frac{mg}{2a}y \geq 0.$$

Для выполнения этого условия нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$y \geq -(1 + \frac{M}{m})a. \tag{5}$$

Определим N_3

$$N_3 = \frac{M+m}{2}g + \frac{mg}{2a}x.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие

$$N_3 \geq 0,$$

следовательно, должно выполняться

$$\frac{M+m}{2}g + \frac{mg}{2a}x \geq 0.$$

Для выполнения этого условия нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$x \geq -(1 + \frac{M}{m})a. \tag{6}$$

Подставим $m = 5M$ и запишем все полученные условия и изобразим на поверхности столешницы область, в которой одновременно выполняются все три неравенства

$$y \leq -x; \tag{7}$$

$$y \geq -(1 + \frac{M}{m})a = -\frac{6}{5}a; \tag{8}$$

$$x \geq -(1 + \frac{M}{m})a = -\frac{6}{5}a. \tag{9}$$

Способ 2

Сделаем рисунок столешницы с видом сверху и введем систему координат $X'O'Y'$, начало координат поместим в точку, где находится вторая ножка (см. Рис. 4). Координаты точки, в которой находится ваза, обозначим x' и y'.

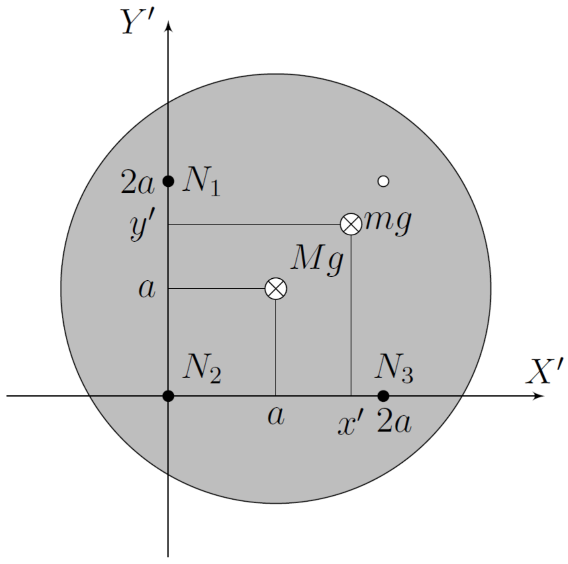

Рис. 4

Запишем условие равновесия системы

$$(M + m)g = N_1 + N_2 + N_3, \tag{1’}$$

правило моментов для оси $O'X'$

$$N_1 \cdot 2a = mgy' + Mga, \tag{2’}$$

И правило моментов для оси $O'Y'$

$$N_3 \cdot 2a = mgx' + Mga. \tag{3’}$$

Из уравнения (2') определим силу реакции первой ножки

$$N_1 = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2a}y'.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$N_1 \geq 0,$$

Откуда получаем область допустимых значений для y'

$$y' \geq -\frac{M}{m}a; y' \geq -\frac{a}{5}. \tag{4’}$$

Из уравнения $(3')$ определим силу реакции третьей ножки

$$N_3 = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2a}x'.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$N_3 \geq 0,$$

Откуда получаем область допустимых значений для x'

$$x' \geq -\frac{M}{m}a; x' \geq -\frac{a}{5}. \tag{5’}$$

Из уравнения (1) определим силу реакции второй ножки

$$N_2 = Mg + mg - N_1 - N_3 = mg\left(1 - \frac{x'}{2a} - \frac{y'}{2a}\right).$$

Условие неотрицательности силы реакции второй ножки даёт неравенство

$$y' \leq 2a - x'. \tag{6’}$$

Геометрическое место точек, которые удовлетворяют неравенствам $(4')$, $(5')$ и $(6')$ находится в той же области на поверхности стола, что найдена в первом варианте.

2 ?? Если да, то укажите, все возможные их положения.

Ответ:
Область, где возможно размещение вазы, ограничена тремя прямыми, и выделена на рисунке тёмно-серым цветом.

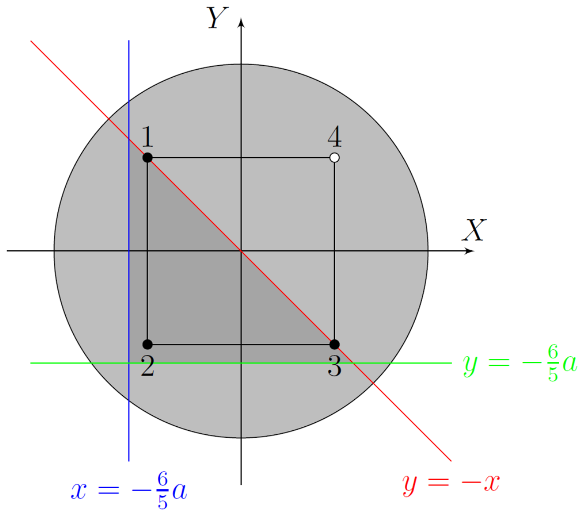

Рис. 5

Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.