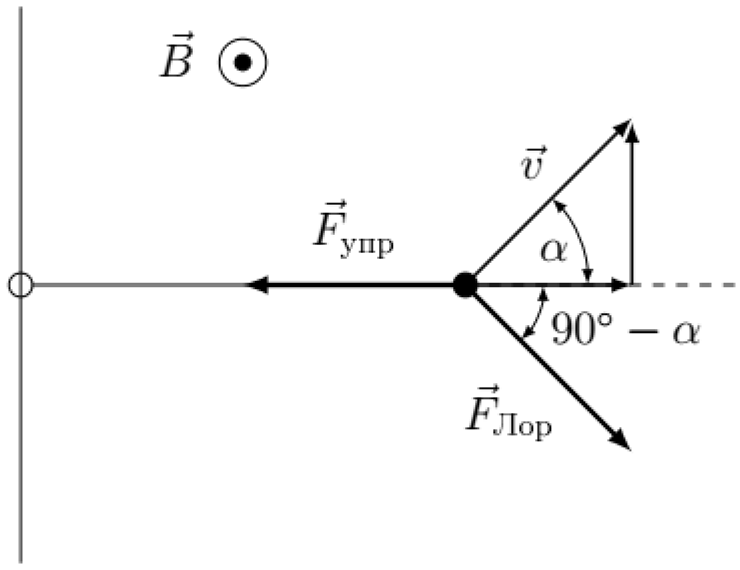
1 ?? Определите траекторию заряда.



Пусть ось x горизонтальна и направлена от спицы, ось y направлена вверх вдоль спицы. Начало координат находится к точке начального положения заряда. Запишем проекции второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB\cos(90^\circ - \alpha) \\ m\ddot{y} = -qvB\sin(90^\circ - \alpha) \end{cases}$$

Преобразуем полученные уравнения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB\sin(\alpha), \\ m\ddot{y} = -qvB\cos(\alpha). \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qB\dot{y}, \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x}. \end{cases}$$

Метод 1

Продифференцируем по времени первое уравнение системы. Тогда

$$m\dddot{x} = -k\dot{x} + qB\ddot{y},$$

$$\dddot{x} + \left[\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2\right]\dot{x} = 0.$$

Обозначим $\beta^2 = \frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2$:

$$\dddot{x} + \beta^2\dot{x} = 0.$$

Откуда

$$\dot{x}(t) = C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t).$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0, \\ \ddot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0\cos(\beta t), \\ x(t) = \frac{v_0}{\beta}\sin(\beta t), \\ \dot{y}(t) = \frac{-qBv_0}{m\beta}\sin(\beta t), \\ y(t) = \frac{qBv_0}{m\beta^2}\left(\cos(\beta t) - 1\right). \end{cases}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}}\right)^2+\left(\frac{y(t)+\frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}}\right)^2=1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0,y_0)=\left(0,-\frac{qBv_0}{m\beta^2}\right)=\left(0,-\frac{qBmv_0}{km+(qB)^2}\right),$$

большой полуосью

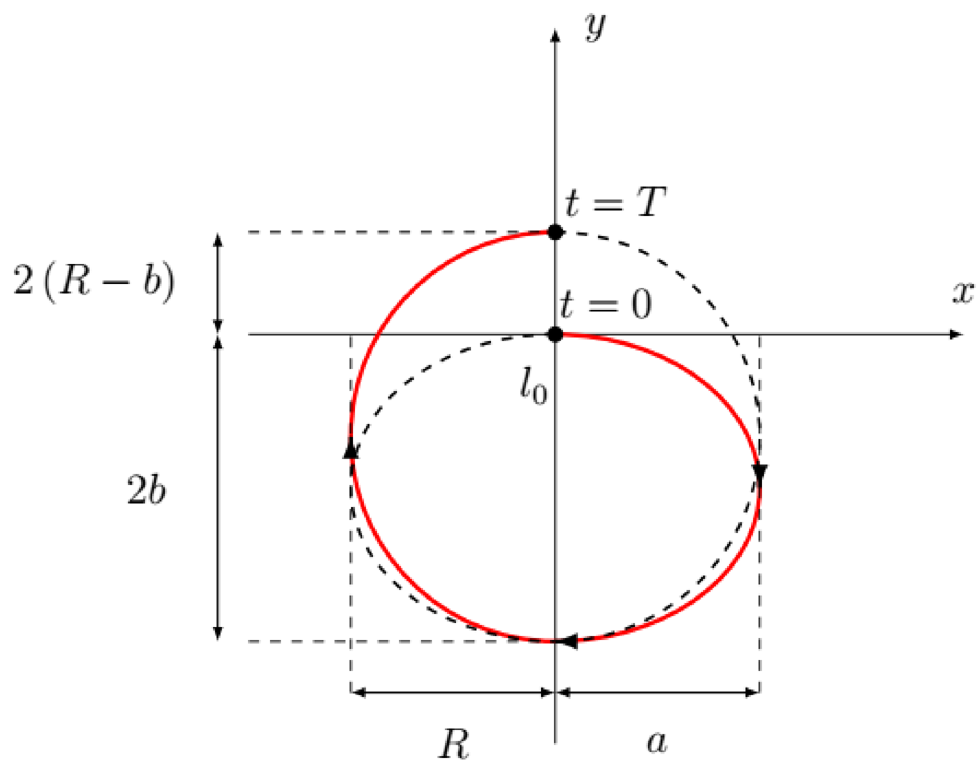
$$a=\frac{v_0}{\beta}=\frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}}=R\gamma,$$

малой полуосью

$$b=\frac{qBv_0}{m\beta^2}=\frac{qBmv_0}{km+(qB)^2}=R\gamma^2,$$

где $R=\frac{mv_0}{qB}$ и $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{mk}{(qB)^2}}}<1.$

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по дуге окружности радиуса $R=\dfrac{mv_0}{qB}$.



Метод 2

Из $m\ddot{y}=-qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y=-\frac{qB}{m}dx=-\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y=0$, $x=0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y=-\Omega x.$$

Сила Лоренца не совершает работы, и, согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{m{v_0}^2}{2}=\frac{m({v_x}^2+{v_y}^2)}{2}+\frac{kx^2}{2}.$$

Откуда:

$${v_x}^2={v_0}^2-(\Omega^2+\frac{k}{m})x^2={v_0}^2-\beta^2x^2,$$

где $\beta^2=\Omega^2+\frac{k}{m}$.
Выразим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\Omega x}{\sqrt{{v_0}^2-\beta^2x^2}}.$$

Откуда:

$$dy=-\frac{\Omega}{\beta}\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\gamma d(\sqrt{a^2-x^2}),$$

где $a=\frac{v_0}{\beta}=\frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}}$ и $\gamma=\frac{\Omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{mk}{(qB)^2}}}<1.$

Суммируя малые изменения этих величин, получим:

$$y - 0 = \gamma(\sqrt{a^2 - x^2} - a)$$

Откуда:

$$\left(\frac{y + \gamma a}{\gamma a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение эллипса. Координаты центра эллипса $(0, -\gamma a)$, его большая полуось равна $a = \frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}} = R\gamma$, а малая $b = \gamma a = \frac{qBmv_0}{km+(qB)^2} = R\gamma^2$.

Это уравнение описывает траекторию вплоть до возвращения длины резинки к исходной. Далее заряд попадает в область, где резинка провисает, и он движется по окружности радиуса $R = \frac{v_0}{\Omega} = \frac{mv_0}{qB}$ до возвращения длины резинки к исходной, после чего резинка натягивается и движение повторяется.

Метод 3

Из второго уравнения системы $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y = -\frac{qB}{m}dx = -\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y = 0$, $x = 0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y = -\Omega x.$$

Подставим это в первое уравнение системы:

$$m\ddot{x} = -kx - qB\Omega x.$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{k}{m} + \Omega^2\right)x$$

Обозначим $\beta^2 = \Omega^2 + \frac{k}{m}$.

$$x = C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\beta}. \end{cases}$$

$$x = \frac{v_0}{\beta}\sin(\beta t)$$

Подставим в выражение для v_y:

$$\dot{y} = -\Omega x = -\frac{\Omega v_0}{\beta}\sin(\beta t).$$

Интегрируя, получаем:

$$y = \frac{\Omega v_0}{\beta^2}(\cos(\beta t) - 1)\,.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{y(t) + \frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}}\right)^2 = 1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0, y_0) = \left(0, -\frac{qBv_0}{m\beta^2}\right) = \left(0, -\frac{qBmv_0}{km + (qB)^2}\right),$$

большой полуосью

$$a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = R\gamma,$$

малой полуосью

$$b = \frac{qBv_0}{m\beta^2} = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = R\gamma^2,$$

где $R = \frac{mv_0}{qB}$ и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{mk}{(qB)^2}}} < 1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по окружности радиуса $R = \frac{mv_0}{qB}$.

Ответ: При положительном удлинении шнура $\Delta x > 0$ траектория является частью эллипса с большой и малой полуосями: $a = \frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}}$, $b = \frac{qBmv_0}{km+(qB)^2}$.

При ненатянутом шнуре $\Delta x = 0$ траектория является частью окружности с радиусом $R = \frac{mv_0}{qB}$.

В целом траектория состоит из последовательно чередующихся половинок эллипса и окружности, которые без излома и без разрыва переходят друг в друга при $x = 0$.

2 ?? Определите дрейфовую скорость заряда.

Определим период движения заряда:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2}} + \frac{\pi}{\frac{qB}{m}} = \frac{\pi m}{qB}\left(\frac{qB}{\sqrt{km + (qB)^2}} + 1\right).$$

Ответ: Тогда дрейфовая скорость

$$u = \frac{2\left(R - b\right)}{T} = \frac{2kmv_0}{\pi\sqrt{km + (qB)^2}\left(qB + \sqrt{km + (qB)^2}\right)}.$$

Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.