Выразите $T_г$ через T_0 и $T_х$.

Поскольку поршни лёгкие и могут перемещаться без трения, давление внутри и снаружи одинаковое (равно p_0). Объём газа под поршнем $V = \pi r^2 h$, где h — высота расположения поршня. Уравнение Менделеева-Клапейрона для газа внутри цилиндра $p_0 \pi r^2 h = \nu RT$. Для малых изменений высоты и температуры $p_0 \pi r^2 dh = \nu R dT$, где $dh = v dt$.

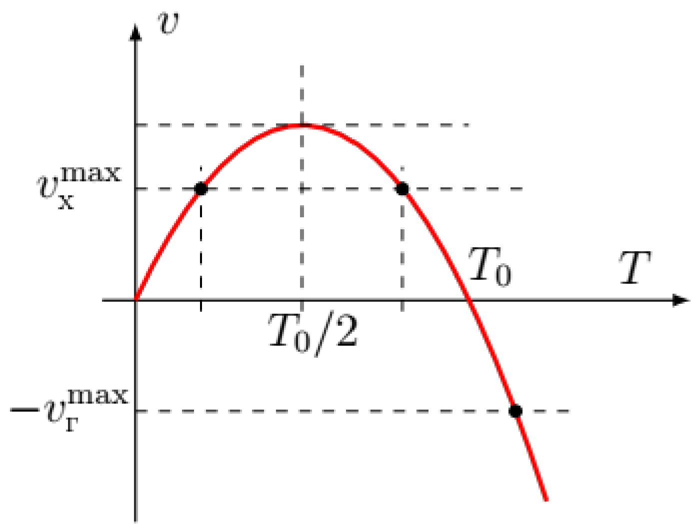
Изменение температуры газа происходит изобарически. Уравнение теплового баланса для малого промежутка времени $\alpha h 2\pi r(T_0 - T)dt = \nu C_p dT$.

Из трёх записанных уравнений находим связь скорости и температуры:

$$v = \frac{2\alpha\nu R^2}{\pi C_p p_0^2 r^3} \cdot T(T_0 - T).$$

Иначе $v(T) = aT(T_0 - T)$, где $a = \frac{2\alpha\nu R^2}{\pi C_p p_0^2 r^3} = \mathrm{const}$.

Графическое отображение полученной зависимости – парабола, пересекающая ось абсцисс в точках 0 и T_0. Для горячего цилиндра максимальное значение скорости достигается в начальной точке движения при $T = T_г$ и равно по модулю $v_г^{\max} = aT_г(T_г - T_0)$.



Для холодного цилиндра максимальное значение скорости не определяется однозначно. При $T_х \geq T_0/2$ оно также достигается в начальной точке движения при $T = T_х$ и равно $v_х^{\max} = aT_х(T_0 - T_х)$. Если $T_х < T_0/2$, то максимум скорости соответствует значению $T = T_0/2$ (вершина параболы) и равен $v_х^{\max} = aT_0^2/4$.

Приравнивая выражения для скоростей $v_г^{\max} = v_х^{\max}$, находим искомое.

При $T_х \geq T_0/2$ получим $T_г(T_г - T_0) = T_х(T_0 - T_х)$. Решаем квадратное уравнение (относительно $T_г$): $T_г^2 - T_г T_0 - T_х(T_0 - T_х) = 0$, оставляем только положительный корень. Итак:

$$T_г = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_х(T_0 - T_х)}}{2}.$$

При $T_х < T_0/2$ получим $T_г(T_г - T_0) = T_0^2/4$. Решаем квадратное уравнение (относительно $T_г$): $T_г^2 - T_г T_0 - T_0^2/4 = 0$, оставляем только положительный корень. Итак:

$$T_г = T_0 \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:

$$T_г = \begin{cases} T_0 \cdot \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, \text{ если } T_х < T_0/2; \\ \dfrac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_х(T_0 - T_х)}}{2}, \text{ если } T_х \geq T_0/2. \end{cases}$$

Website in English