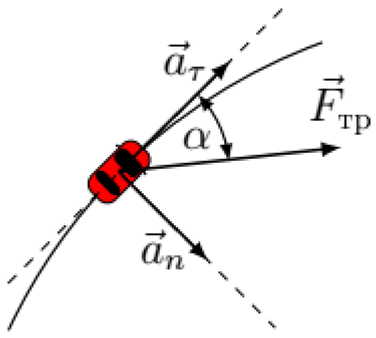
1 ?? До какой максимальной скорости может разогнаться автомобиль на этой дороге?



В рамках предположений условия максимальная величина сила трения колес о поверхность дороги равна $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu N = \mu mg$, где m – масса автомобиля, и при этом ее можно направить любом направлении в горизонтальной плоскости дороги. Так как другие горизонтальные силы на автомобиль не действуют, то именно сила трения и разгоняет автомобиль, и удерживает его на нужной траектории. Пусть α – угол между скоростью автомобиля и направлением силы трения в некоторый момент времени (см. рисунок). Тогда уравнения для касательной и центростремительной компонент ускорения автомобиля имеют вид

$$\begin{Bmatrix} ma_\tau = m\frac{dv}{dt} = \mu mg \cdot \cos(\alpha) \\ ma_n = m\frac{v^2}{R} = \mu mg \cdot \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu g R \cdot \sin(\alpha) \end{cases} (1).$$

Видно, что разгон автомобиля завершается $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$ и скорость достигает максимального возможного значения $v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с при $\alpha = 90^\circ$. Далее угол α и скорость автомобиля поддерживаются постоянными.

2 ?? Определите скорость автомобиля при прохождении точек C, D и B во время заезда (см. рисунок).

Уравнение для касательной компоненты ускорения можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{v \cdot dv}{v \cdot dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha)(2).$$

Здесь s– путь, пройденный автомобилем от момента старта.
Далее можно действовать как минимум тремя путями.

СПОСОБ I: Подставив в (2) квадрат скорости из второго уравнения (1), находим, что

$$\mu g R\frac{d(\sin(\alpha))}{ds} = \mu g R \cdot \cos(\alpha)\frac{d\alpha}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow d\alpha = \frac{2}{R}ds.$$

На старте $s = 0$ и $\alpha = 0$, то есть после суммирования приращений в этом соотношении от старта до любого момента времени в процессе разгона получаем связь угла α с пройденным автомобилем расстоянием $\alpha(s) = \frac{2s}{R}$. Значит, разгон завершится в момент времени, когда $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C.

СПОСОБ II: Выразив $\sin(\alpha) = \frac{v^2}{\mu g R} = \left(\frac{v}{v_m}\right)^2$ и подставив это соотношение в уравнение (2), приводим его к виду $\frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4}$. Введем новую переменную $y \equiv \left(\frac{v}{v_m}\right)^2$, и получим уравнение $\frac{dy}{ds} = \frac{2}{R}\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{2}{R}ds = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$. Интегрируя его по любому участку пути на дуге AC, находим, что

$$\frac{2}{R}s = \int_0^{(v/v_m)^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin\left(\frac{v^2}{v_m^2}\right) \Rightarrow v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right).$$

Как видно, скорость достигает максимума при $s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C.

СПОСОБ III: Составив систему из второго уравнения в (1) и (2), можно получить из нее уравнение для зависимости $v^2(s)$ на участке AC

$$\begin{Bmatrix} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu g R \cdot \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ \frac{d(v^2)}{ds} = \mu g R \cdot \cos(\alpha)\frac{d\alpha}{ds} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2(v^2)}{ds^2} = -2\mu g \cdot \sin(\alpha)\frac{d\alpha}{ds} \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2}{R} \end{cases}$$

Действительно, подставляя в уравнение для $\frac{d^2(v^2)}{ds^2}$ полученные
выражения для $\sin(\alpha)$ и $\frac{d\alpha}{ds}$, приходим к уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2(v^2)}{ds^2} + \frac{4}{R^2}v^2 = 0.$$

С учетом условий $v^2(0) = 0$ и $(v^2)'_s(0) = \mu g R$ приходим к решению $v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right)$. Как видно, скорость достигает максимума при $s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C.

Таким образом, во время заезда с минимальным временем прохождения полуокружности скорость автомобиля в точках C,D и B равна максимальной: $v_C = v_D = v_B = v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с.

3 ⁇ Найдите общее время прохождения полуокружности AB.

Ясно, что время прохождения участка полуокружности от C до B равно $t_{CB} = \frac{3\pi R}{4 v_m} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{\mu g}}$. В зависимости от способа решения в пункте 2 далее можно использовать разные способы решения и в этом пункте.

СПОСОБ I: Исключим угол α из уравнений (1): на участке AC

$$\sin(\alpha) = \frac{v^2}{\mu g R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4} \Rightarrow dt = \frac{v_m}{\mu g} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv \frac{v}{v_m}$. На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \beta\sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

СПОСОБЫ II и III: Поскольку на участке AC $v(s) = v_m\sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)} = \frac{ds}{dt}$, то:

$$dt = \frac{1}{v_m}\frac{ds}{\sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv \sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)}$. Отметим, что

$$\sin\left(\frac{2s}{R}\right) = x^2 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{2s}{R}\right)\frac{ds}{R} = 2x dx \Rightarrow \frac{ds}{R} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \beta\sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

В итоге общее время прохождения полуокружности AB равно

Ответ:

$$T = t_{AC} + t_{CB} = \left(\beta + \frac{3\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{R}{\mu g}} \approx 14{,}7\text{с}.$$

Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.