1 [4.00] На какое расстояние h_0 сместятся концы столбика ртути после переворота, если в конечном состоянии температура не изменится и будет равна T_0?

Пусть смещение концов столбика ртути после переворота трубки равно h_0. Разность давлений воздуха в левой и правой частях трубки $\Delta P = P_л - P_п$ уравновешивается избыточным гидростатическим давлением ртути $2\rho g h_0$. Используя закон Бойля-Мариотта, найдем:

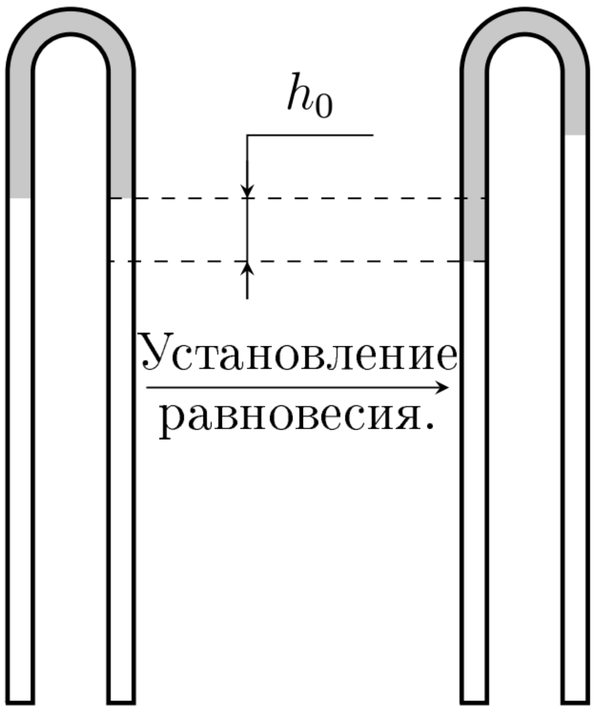
$$P_л = P_А \frac{l}{l-h_0}, \quad P_п = P_А \frac{l}{l+h_0}.$$

Запишем условие равновесия столбика ртути :

$$P_А \frac{l}{l-h_0} - P_А \frac{l}{l+h_0} = 2\rho g h_0.$$

После преобразований получаем:

$$\frac{2lh_0P_А}{l^2-h_0^2} = 2\rho g h_0.$$



Решения этого уравнения

$$h_0 = 0,\ h_0 = \pm\sqrt{l\left(l - \frac{P_А}{\rho g}\right)}.$$

При $P_А = 750$ мм.рт.ст. > 625 мм.рт.ст. $= \rho g l$ подходит только один из корней $h_0 = 0$. Таким образом, сразу после переворота столбик ртути не смещается.

Ответ: $h_0 = 0$ мм.

2 [3.00] На какое расстояние h_1 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_1 = 0{,}8T_0$?

Понижение температуры до $0,8T_0$ соответствует изменению начального давления воздуха (давления воздуха в трубке с запаянными концами до её переворота) с P_A до $P_1 = 0{,}8P_A = \rho g L_1$, где $L_1 = 0{,}8 \cdot 750$ мм $= 600$ мм. В этом случае существует решение:

$$h_1 = \sqrt{l\left(l - \frac{P_1}{\rho g}\right)} = \sqrt{l\,(l - L_1)} = \sqrt{0,625\,(0{,}625 - 0{,}600)}\ \text{м} = \frac{l}{5} = 125\ \text{мм}.$$

Можно показать, что именно это решение соответствует устойчивому положению столбика ртути. Корень $h_1 = 0$ мм соответствует неустойчивому положению, то есть при небольшом смещении столбика ртути избыточное гидростатическое давление превышает разность давлений воздуха в левом и правом участках трубки и ртуть стремится занять положение, соответствующее устойчивому положению.

Покажем, что корень $h_1 = 125$ мм соответствует устойчивому равновесию. Пусть от положения равновесия столбик ртути сместилась дополнительно на некоторое малое расстояние x, тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_л(x) = \frac{lP_1}{l-h_1-x} = \frac{lP_1}{l-h_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{l-h_1}} \approx \frac{lP_1}{l-h_1}\left(1 + \frac{x}{l-h_1}\right) = \frac{lP_1}{l-h_1} + \frac{xlP_1}{(l-h_1)^2}.$$

Аналогично для давления в правой части сосуда:

$$P_п(x) = \frac{lP_1}{l+h_1+x} \approx \frac{lP_1}{l+h_1} - \frac{xlP_1}{(l+h_1)^2}.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$F_д(x) = (P_л - P_п)S \approx \left(\frac{lP_1}{l-h_1} - \frac{lP_1}{l+h_1}\right)S + \left(\frac{1}{(l-h_1)^2} + \frac{1}{(l+h_1)^2}\right)xlP_1S =$$

$$= F_д(0) + \frac{2(l^2+h_1^2)}{(l^2-h_1^2)^2}xlP_1S.$$

Сила, равная разности сил тяжестей, действующих на столбики ртути в разных частях сосуда, стремится вывести столбик ртути из положения равновесия:

$$F_т(x) = \rho S(l/4 + h_1 + x) - \rho S(l/4 - h_1 - x) = 2\rho g S h_1 + 2\rho g S x = F_т(0) + 2\rho g S x.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учётом равенства $F_д(0) = F_т(0)$ в положении равновесия:

$$\Delta F = F_д - F_т = 2\left(\frac{(l^2 + h_1^2) l L_1}{(l^2 - h_1^2)^2} - 1\right)\rho g S x.$$

Подставив в выражение корень $h_1 = 0$, получим:

$$\Delta F = F_д - F_т = 2\left(\frac{(l^2 + 0^2) l L_1}{(l^2 - 0^2)^2} - 1\right)\rho g S x = 2\left(\frac{L_1}{l} - 1\right)\rho g S x =$$

$$= 2\left(\frac{600\ мм}{625\ мм} - 1\right)\rho g S x < 0,$$

т.е. суммарная сила, действующая на систему, будет выводить её из положения равновесия, и $h_1 = 0$ мм соответствует неустойчивому положению равновесия.
Подставив $h_1 = l/5$, получим:

$$\Delta F = F_{давл} - F_{тяж} = 2\left(\frac{(l^2 + (l/5)^2) l L_1}{(l^2 - (l/5)^2)^2} - 1\right)\rho g S x = 2\left(\frac{25 \cdot 26 \cdot L_1}{24^2 \cdot l} - 1\right)\rho g S x =$$

$$= 2\left(\frac{25 \cdot 26 \cdot 600\ мм}{24^2 \cdot 625\ мм} - 1\right)\rho g S x = 2\left(\frac{26}{24} - 1\right)\rho g S x > 0,$$

т.е. суммарная сила, действующая на систему, будет стремиться вернуть её в положение равновесия, и $h_1 = l/5 = 125$ мм соответствует устойчивому положению равновесия.

Ответ: $h_1 = \frac{l}{5} = 125$ мм.

3 [4.00] На какое расстояние h_2 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_2 = 0{,}7T_0$?

Расчёт по полученной формуле для смещения при начальном давлении $P_2 = 0{,}7P_A = \rho g L_2$, где $L_2 = 0{,}7 \cdot 750$ мм $= 525$ мм, соответствующего температуре $T_2 = 0{,}7T_0$, даёт результат:

$$h_2 = \sqrt{l\left(l - \frac{P_2}{\rho g}\right)} = \sqrt{0{,}625\,(0{,}625 - 0{,}525)}\ м = 0{,}25\ м = 250\ мм = \frac{2l}{5} > \frac{l}{4}.$$

Но в этом случае столбик ртути целиком перемещается в одну из частей трубки и выражение для избыточного гидростатического давления $2\rho g h_2$ должно быть заменено на $\frac{\rho g l}{2}$.
Пусть столбик ртути целиком перешёл в одну из частей трубки и его нижний конец переместился вниз на h_2, тогда в левой и правой частях трубки давление будет соответственно равно:

$$P_л = P_2 \frac{l}{l - h_2} = \frac{\rho g l L_2}{l - h_2}, \quad P_п = P_2 \frac{l}{l + h_2} = \frac{\rho g l L_2}{l + h_2}.$$

Условие равновесия столбика выглядит теперь следующим образом:

$$\frac{2\rho g l L_2 h_2}{l^2 - h_2^2} = \frac{\rho g l}{2}.$$

Получим квадратное уравнение:

$$h_2^2 + 4L_2 h_2 - l^2 = 0,$$

которое имеет корни

$$h_2 = -2L_2 \pm \sqrt{4L_2^2 + l^2}.$$

Отбросив отрицательный корень, получаем ответ:

$$h_2 = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{T_2 P_A}{T_0 \rho g}\right)^2 + l^2} - \frac{2T_2 P_A}{T_0 \rho g} = \sqrt{4 \cdot 0{,}525^2 + 0{,}625^2}\ мм - 2 \cdot 0{,}525\ мм \approx 172\ мм.$$

Ответ: $h_2 \approx 172$ мм.

4 [1.00] Докажите устойчивость положения равновесия, найденного в п.3.

Покажем, что $h_2 \approx 172$ мм соответствует устойчивому положению равновесия. Пусть от положения равновесия ртуть дополнительно сместилась на малое расстояние $x > 0$, тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_л(x) = \frac{lP_2}{l - h_2 - x} = \frac{lP_2}{l - h_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l - h_2}} = \frac{lP_2}{l - h_2} + \Delta P_1,\ \Delta P_1 > 0.$$

Аналогично находим давление газа в правой части сосуда:
$P_{\text{п}}(x) = \frac{lP_2}{l+h_2+x} = \frac{lP_2}{l+h_2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{l+h_2}} = \frac{lP_2}{l+h_2} - \Delta P_2,\ \Delta P_2 > 0.$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$F_{\text{д}} = (P_{\text{л}} - P_{\text{п}})S \approx \left(\frac{lP_2}{l-h_2} - \frac{lP_2}{l+h_2}\right) S + (\Delta P_1 + \Delta P_2)\, S =$$
$$= F_{\text{д}0} + (\Delta P_1 + \Delta P_2)\, S.$$

Сила тяжести не изменяется при движении столба жидкости внутри одной части сосуда:

$$F_{\text{т}} = \rho Slg/2.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учетом равенства $F_{\text{д}0} = F_{\text{т}}$ в положении равновесия:

$$\Delta F = F_{\text{д}} - F_{\text{т}} = (\Delta P_1 + \Delta P_2)\, S > 0,$$

т.е. результирующая сила положительна и положение равновесия устойчиво.