1 ?? С какой минимальной скоростью v_{m1} Глюк должен бросить камень с поверхности земли, чтобы он достиг притягивающего луча?

Пока камень не долетел до притягивающего луча, он движется с постоянным ускорением $\vec{g}$. Дальность полёта камня, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту равна

$$l_0 = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Это выражение принимает максимальное значение при $\alpha = 45^\circ$, следовательно

$$v_{m1} = \sqrt{gl}.$$

Ответ:

$$v_{m1} = \sqrt{gl}.$$

2 ?? С какой минимальной скоростью v_{m2} Глюк должен бросить камень, чтобы он пролетел область, ограниченную лучом, насквозь?

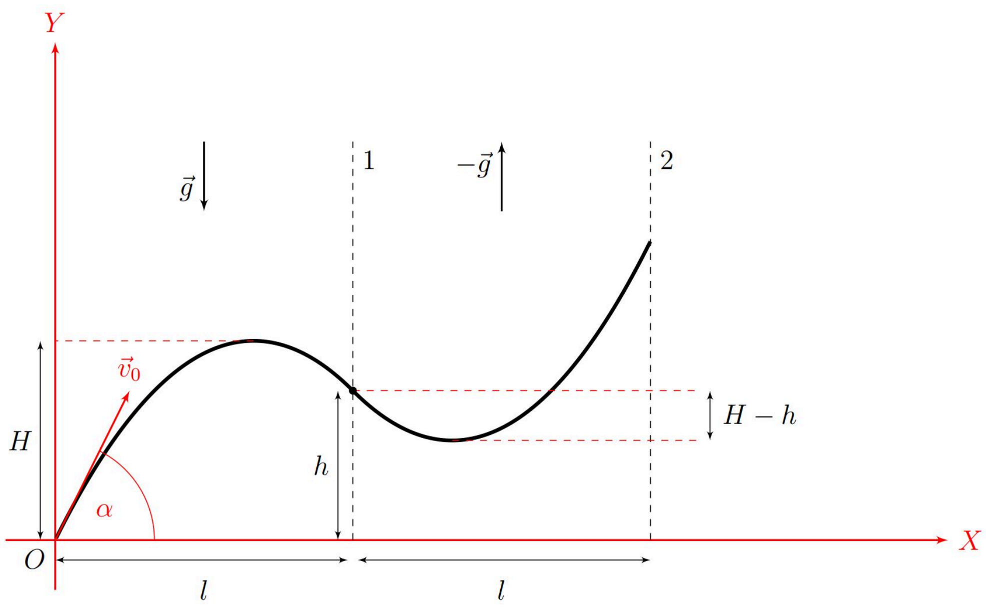
Направим ось OX горизонтально, а ось OY — вертикально вверх; в качестве начала отсчёта O выберем положение Глюка. Левую и правую (по ходу полёта камня) границы области, ограниченной притягивающим лучом, пронумеруем 1 и 2 соответственно (см. рисунок). Ясно, что внутри луча камень движется с ускорением $-\vec{g}$, и если он пересекает границу 1 так, что проекция его скорости $v_y \geq 0$, то камень достигнет и границы 2. Этому соответствует условие

$$v_0 \sin\alpha - gt_1 \geq 0,$$

где $t_1 = l/(v_0\cos\alpha)$, а α — угол между $\vec{v}_0$ и горизонтом. Следовательно, чтобы пролететь область, ограниченную лучом, насквозь, заведомо достаточно скорости

$$v'_{m2} = \sqrt{\frac{2gl}{\sin 2\alpha}}.$$

Проверим, что $v_{2m} < v'_{m2}$. Характерная для такого случая траектория камня приведена на рисунке. Её участок левее границы 2 обладает центральной симметрией относительно точки пересечения границы 1. Пусть H — наибольшая высота подъёма камня на участке слева от луча, а h — высота, на которой камень пересекает границу 1.



Траектория камня при $v > v_{m1}$ обладает центральной симметрией

Из сказанного выше следует (см. рисунок), что для того, чтобы камень достиг границы 2, достаточно

$$H - h < h \quad \Rightarrow \quad h > H/2.$$

Из закона равноускоренного движения следует, что

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$
$$h = y(l) = \mathrm{tg}\alpha \cdot l - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot l^2.$$

Тогда условие $h > H/2$ может быть приведено к виду

$$\frac{8g^2l^2}{\sin^2 2\alpha} - \frac{8gl}{\sin 2\alpha} \cdot v_0^2 + v_0^4 < 0.$$

Выделим в этом выражении полный квадрат:

$$\left(\frac{4gl}{\sin 2\alpha} - v_0^2\right)^2 - \frac{8g^2l^2}{\sin^2 2\alpha} < 0.$$

Откуда выразим v_0^2 (напомним, что нас интересуют значения $v_0^2 < 2gl/\sin 2\alpha$, так что выражение в скобках положительно):

$$v_0^2 > \frac{4gl}{\sin 2\alpha} - \frac{2\sqrt{2}gl}{\sin 2\alpha} = \frac{2(2-\sqrt{2})gl}{\sin 2\alpha}.$$

Правая часть меньше v'_{2m} и достигает минимального значения при $\alpha = 45^\circ$, следовательно

$$v_{m2} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})gl}.$$

Ответ:

$$v_{m2} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})lg} \approx \sqrt{1{,}17lg}.$$

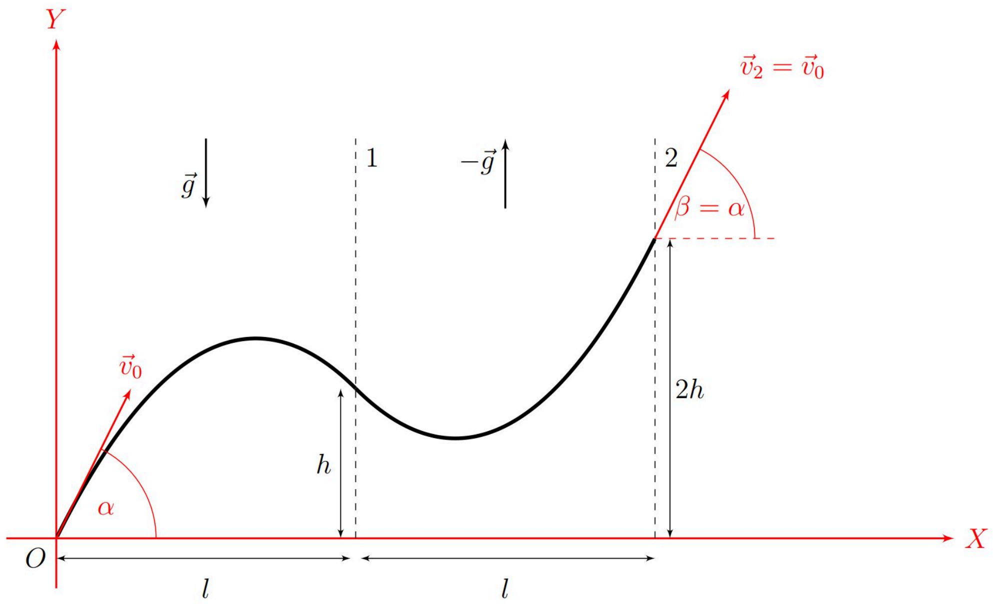
3 ?? Какова максимальная дальность броска L_{m2}, если начальная скорость камня равна $v_0 (v_0 \geq v_{m2})$?

Горизонтальная компонента скорости камня неизменна, следовательно участки слева от притягивающего луча и внутри него камень проходит за одно время

$$t_0 = t_1 = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}.$$

Найдём скорость камня при пересечении границы 2

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{g}t_0 - \vec{g}t_1 = \vec{v}_0.$$



Камень пересекает границу 2 со скоростью $\vec{v}_2 = \vec{v}_0$

Из соображений симметрии (см. рисунок) следует, что камень пересекает границу 2 на высоте $2h$. Время t_2, за которое он после этого упадёт на землю,

$$2h + v_0 \sin\alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + \frac{4h}{g}}.$$

Этому соответствует горизонтальное смещение

$$l_2 = v_0 \cos\alpha \cdot t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{4hv_0^2 \cos^2\alpha}{g}}.$$

Подставим в это выражение

$$h = l\mathrm{tg}\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

и получим

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{2lv_0^2 \sin 2\alpha}{g} - 2l^2}.$$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

l_2 монотонно возрастает при увеличении $\sin 2\alpha$, следовательно достигает максимального значения при $\alpha = 45^\circ$,

$$l_{m2} = \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

Искомое расстояние $L_{m2} = 2l + l_{m2}$.

Ответ:

$$L_{m2} = 2l + \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}$$

4[??] Найдите максимальную дальность броска L_{m3} в случае $v_0 = v_{m2}$.

Поскольку и v_{m2}, и L_{m2} соответствуют броску под углом в 45°, достаточно подставить $v_0^2 = 2(2-\sqrt{2})gl$ в выражение для L_{m2}. Получим

$$L_{m3} = \left(4 - \sqrt{2} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}\right) l = (2+\sqrt{2})l \approx 3,41l.$$

Ответ:

$$L_{m3} = (2+\sqrt{2})l \approx 3{,}41l.$$

Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.