МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2025 – 2026 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 11 классов

***Уважаемый участник Олимпиады!***

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

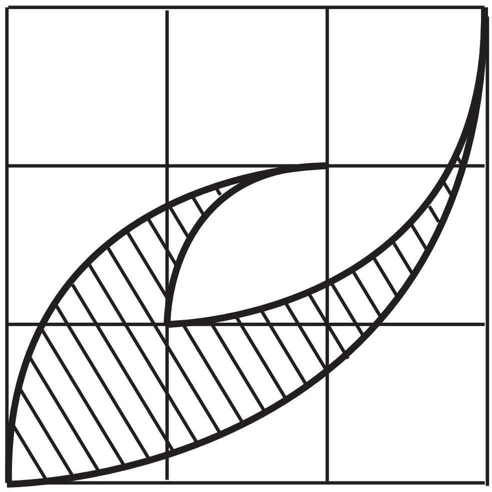
5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

**Максимальная оценка — 42 балла.**

**Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.**

***Желаем вам успеха!***



К условию задачи 11.1

**11.1.** Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры (см. рисунок), границей которой является *круговой сплайн* — замкнутая непрерывная линия, составленная из дуг окружностей (с центрами в узлах сетки). Длина стороны клетки равна 1.

**11.2.** Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен. Действительные числа $a$, $b$, $c$ попарно различны и таковы, что $P(a) = bc$, $P(b) = ca$, $P(c) = ab$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a + b + c)}?$$

Ответ обоснуйте.

**11.3.** У натурального числа $n$ нашлись два различных натуральных делителя $m$ и $k$, для которых выполнено равенство

$$k = \frac{n - m}{m - 5}.$$

Докажите, что число $\dfrac{n}{5}$ — целое и является квадратом натурального числа.

**11.4.** Из произвольной точки $O$, лежащей на грани $ABC$ треугольной пирамиды $SABC$ провели прямые $OA_1 \parallel SA$, $OB_1 \parallel SB$ и $OC_1 \parallel SC$ (точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на гранях $SBC$, $SCA$ и $SAB$ соответственно). Докажите равенство

$$\frac{OA_1}{SA} + \frac{OB_1}{SB} + \frac{OC_1}{SC} = 1.$$

**11.5.** Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырёх человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена, и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах. Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки 10 экипажей? Ответ обоснуйте.

**11.6.** Известно, что числа $\sin 2x$, $\sin 5x$ и $\sin 7x$ являются рациональными, и ни одно из них не равно 0. Докажите, что тогда число $\sin 12x$ также является рациональным.