Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

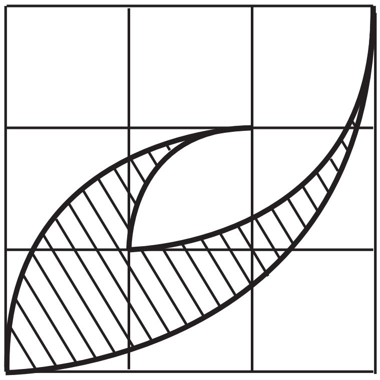
9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году

11 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

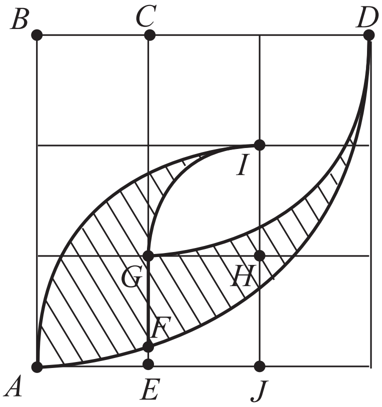


К условию задачи 11.1

11.1. *Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры (см. рисунок), границей которой является круговой сплайн — замкнутая непрерывная линия, составленная из дуг окружностей (с центрами в узлах сетки). Длина стороны клетки равна* 1.

Решение:

<u>Способ 1.</u> Обозначим центры и концы дуг окружностей так, как показано на рисунке. Введём обозначение: через $S_{X,\overline{YZ}}$ будем обозначать площадь сектора окружности с центром X, ограниченного дугой YZ. Разделим фигуру, площадь которой требуется найти, на две отрезком GF и найдём по отдельности площадь каждой из частей. Площадь правой фигуры равна $S_{\text{пр}} = S_{B,\overline{AD}} - S_{C,\overline{GD}} - (S_{ABCE} - x)$, где x — площадь фигурки, ограниченной отрезками AE, EF и дугой AF.



К решению задачи 11.1, способ 1

Все секторы являются четвертинками кругов и их площади находятся элементарно; поэтому

$$S_{\text{пр}} = \frac{1}{4}\pi 3^2 - \frac{1}{4}\pi 2^2 - 3 + x = \frac{5\pi}{4} - 3 + x.$$

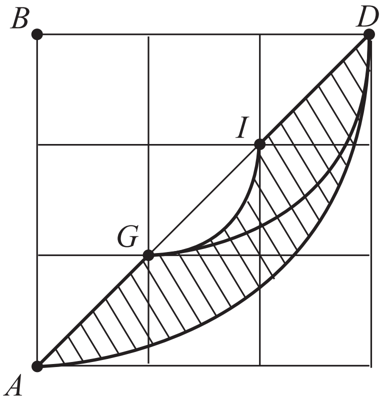
Аналогично, площадь левой фигурки равна

$$S_{\text{л}} = S_{J,\overline{AI}} - S_{J,\overline{GI}} - S_{EGHJ} - x = \\ = \frac{1}{4}\pi 2^2 - \frac{1}{4}\pi 1^2 - 1 - x = \frac{3\pi}{4} - 1 - x.$$

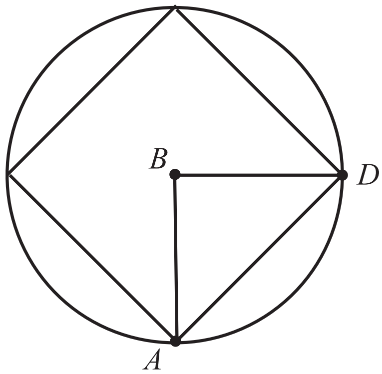
Поэтому общая площадь равна $S_{\text{пр}} + S_{\text{л}} = 2\pi - 4$.

<u>Способ 2.</u> Разрежем фигурку по прямой AD, и ту часть, которая лежит выше прямой, повернём на 180° (см. рисунок ниже слева). Получим равную по площади фигуру (заштрихованная часть на рисунке). Она представляет собой разность двух сегментов, линейные размеры меньшего из которых в три раза меньше линейных размеров большего. Так как площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, интересующая нас площадь равна $\frac{8}{9}$ площади большего сегмента. Но этот сегмент — ровно четверть площади фигуры, которая получится, если из круга радиуса 3 удалить вписанный в него квадрат (см. рисунок ниже справа), поэтому его площадь равна $\frac{1}{4}\Big(9\pi - (3\sqrt{2})^2\Big)$. Тогда искомая площадь равна

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{9\pi - 18}{4} = 2\pi - 4.$$



К решению задачи 11.1, способ 2, разрез фигуры



К решению задачи 11.1, способ 2, удаление квадрата

Ответ: $2\pi - 4$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	5 баллов
Задача верно сведена к нахождению площадей круговых секторов и/или сегментов с известными центральными углами, но расчёты не выполнены	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

11.2. *Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен. Действительные числа a, b, c попарно различны и таковы, что $P(a) = bc$, $P(b) = ca$, $P(c) = ab$. Какие значения может принимать выражение*

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a+b+c)}?$$

Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть $P(x) = mx^2 + nx + t$. Тогда (учитывая, что $a - b \neq 0$) имеем $P(a) - P(b) = m(a+b)(a-b) + n(a-b) = c(b-a)$, откуда $m(a+b) + n = -c$. Аналогично $m(b+c) + n = -a$. Вычтем из одного уравнения другое и получим $m = 1$ (опять-таки учли, что $a - c \neq 0$). Тогда

$$n = -(a+b+c), \qquad t = ab + ac + bc,$$
$$p(x) = x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc,$$

наше выражение тождественно равно 1, так как

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a+b+c)} = \frac{bc + ca + ab}{(a+b+c)^2 - (a+b+c)(a+b+c) + ab + ac + bc} = 1.$$

Ответ: 1.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Задача решена для случая приведённого квадратного трёхчлена	4 балла
Условие задачи верно записано в виде системы уравнений (неизвестные — коэффициенты трёхчлена)	2 балла
Верный ответ, проиллюстрированный конкретным трёхчленом (и конкретной тройкой чисел a, b, c)	1 балл
Ответ без обоснования, а также любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

11.3. *У натурального числа n нашлись два различных натуральных делителя m и k, для которых выполнено равенство*

$$k = \frac{n-m}{m-5}.$$

Докажите, что число $\dfrac{n}{5}$ — целое и является квадратом натурального числа.

Решение: Уравнение из условия задачи равносильно равенству $km-5k+m=n$. Число $m=n+5k-km$ делится без остатка на k, так как k — делитель каждого слагаемого в правой части. Аналогично, число $5k=-n+m+km$ делится без остатка на m. Пусть $m=tk$, где $t\in\mathbb{N}$. Тогда $5k$ кратно числу tk, то есть 5 кратно t. Значит, либо $t=1$, либо $t=5$. Первый случай невозможен, так как $m\neq k$ по условию. Итак, $t=5$, $m=5k$, $n=km=5k^2$. Тогда $\dfrac{n}{5}=k^2$, ч. т. д.

Ещё подчеркнём, что искомые тройки чисел m, k и n существуют. Например, $n=45$, $k=3$, $m=15$.

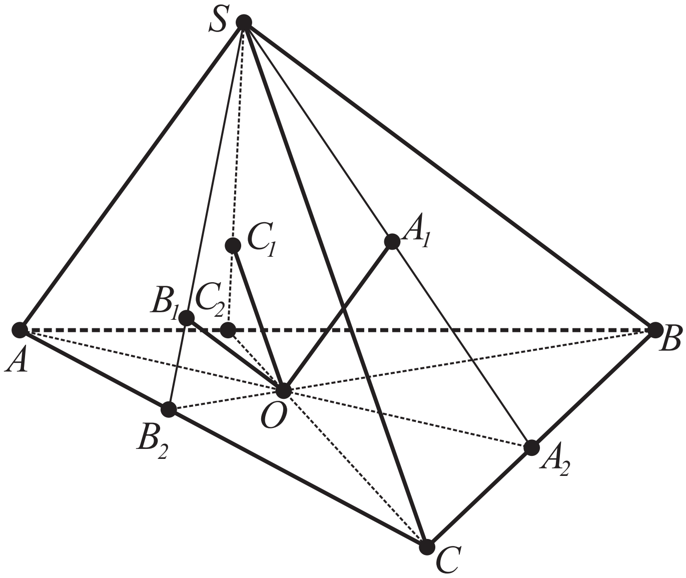
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не указан пример натуральных чисел n, m и k, удовлетворяющих условию задачи	баллы не снижать
Доказано, что а) число m кратно k; б) число m является делителем числа $5k$	4 балла
Доказан один из пунктов а) или б) критерия на 4 балла	2 балла
Любые выкладки, не ведущие к решению, а также иллюстрация утверждения конкретными примерами	0 баллов

11.4. *Из произвольной точки O, лежащей на грани ABC треугольной пирамиды $SABC$ провели прямые $OA_1 \parallel SA$, $OB_1 \parallel SB$ и $OC_1 \parallel SC$ (точки A_1, B_1, C_1 лежат на гранях SBC, SCA и SAB соответственно). Докажите равенство*

$$\frac{OA_1}{SA} + \frac{OB_1}{SB} + \frac{OC_1}{SC} = 1.$$

Решение: Пусть плоскость ASO пересекает ребро BC в точке A_2, тогда эта плоскость пересекает грань SBC по отрезку SA_2. Прямая OA_1 лежит в плоскости SAO, так как она имеет с ней общую точку O и параллельна лежащей в ней прямой SA. Значит, точка A_1 лежит на отрезке SA_2. Аналогично точки B_1 и C_1 лежат на отрезках SB_2 и SC_2 соответственно (точки B_2 и C_2 определяются аналогично точке A_2) — см. рисунок.



К решению задачи 11.4, расположение точек A_1, B_1, C_1

Из подобных треугольников A_2A_1O и A_2SA получаем равенство

$$\frac{OA_1}{SA} = \frac{A_2O}{A_2A}.$$

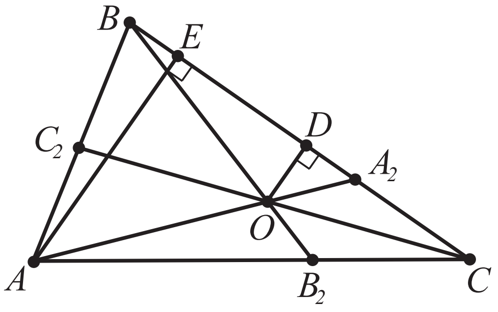
Конечно, такие же равенства верны и для двух других дробей:

$$\frac{OB_1}{SB} = \frac{B_2O}{B_2B}, \quad \frac{OC_1}{SC} = \frac{C_2O}{C_2C}.$$

Задача свелась к планиметрической: «если на сторонах AB, AC и BC выбраны соответственно точки C_2, B_2 и A_2 так, что отрезки AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в точке O, то выполняется равенство

$$\frac{OA_2}{A_2A} + \frac{OB_2}{B_2B} + \frac{OC_2}{C_2C} = 1.$$

Докажем это утверждение.



К решению задачи 11.4, картина в основании пирамиды

Опустим из точек A и O перпендикуляры на прямую BC — отрезки OD и AE (см. рисунок). Тогда из подобия треугольников AA_2E и OA_2D следует, что

$$\frac{OA_2}{A_2A} = \frac{OD}{AE} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot OD}{\frac{1}{2}BC \cdot AE} = \frac{S_{BOC}}{S_{BAC}}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\frac{OB_2}{B_2B} = \frac{S_{AOC}}{S_{BAC}}, \quad \frac{OC_2}{C_2C} = \frac{S_{BOA}}{S_{BAC}}.$$

Значит,

$$\frac{OA_2}{A_2A} + \frac{OB_2}{B_2B} + \frac{OC_2}{C_2C} = \frac{S_{BOC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{BOA}}{S_{BAC}} = \frac{S_{BAC}}{S_{BAC}} = 1.$$

Доказательство завершено.

Примечание: Для школьников, знающих формулу объёма пирамиды, задача допускает следующее решение: Пирамида $SABCD$ представляется как объединение трёх пирамид $SABO$, $SBCO$, $SCAO$. Каждая из дробей в доказываемой формуле равна отношению объёмов одной из этих пирамид к объёму всей пирамиды $SABC$ — доказательство почти такое же, как в приведённом выше решении для площадей треугольников.

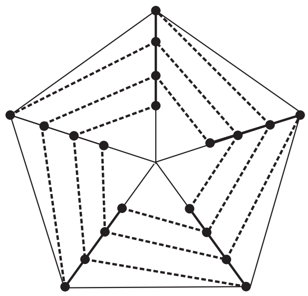
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Задача верно сведена к планиметрической ИЛИ дроби в доказываемом равенстве представлены в виде отношения объёмов пирамид	3 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также решения в частных случаях (для конкретных точек O)	0 баллов

11.5. *Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырёх человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена, и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах. Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки* 10 *экипажей? Ответ обоснуйте.*

Решение: Добавим к каждому человеку его двойника, но потребуем, чтобы каждый человек был в составе не более, чем одного экипажа. Тогда для 10 экипажей потребуется ровно 40 человек, поэтому до добавления двойников в центре подготовки было по крайней мере 20 человек. Покажем, что 20 человек достаточно. Сначала сформируем из них пять экипажей, не имеющих общих членов. Присвоим этим экипажам номера от 1 до 5. В шестой экипаж отрядим по одному космонавту из экипажей 1, 2, 3, 4. В седьмой — по одному из экипажей 1, 2, 3, 5 (берём других космонавтов), в восьмой — из экипажей 1, 2, 4, 5, в девятый — из экипажей 1, 3, 4, 5, наконец, в десятый — 2, 3, 4, 5. Условие задачи выполнено.

Примечание: Сформировать экипажи нужным образом можно и чисто геометрически, например, так. Построим космонавтов в пять колонн, по 4 человека в каждой, а каждую колонну поставим на своей линии, идущей от вершины правильного пятиугольника к его центру. Первые пять экипажей — сами колонны (см. рисунок). Теперь дальних от центра пятиугольника космонавтов не двигаем, тех кто стоит непосредственно перед ними (второй ряд) сдвинем по кругу влево на одного человека, третий ряд — влево на двух человек, а четвёртый — влево на трёх. Космонавты, оказавшиеся после сдвигов в одной колонне, образуют ещё пять экипажей — пунктирные линии на рисунке.


К примечанию к задаче 11.5

Ответ: 20 космонавтов.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Пример на 20 человек	4 балла
Доказано, что необходимо не менее 20 человек	3 балла
Ответ без обоснования	0 баллов

11.6. *Известно, что числа* $\sin 2x$, $\sin 5x$ *и* $\sin 7x$ *являются рациональными, и ни одно из них не равно* 0. *Докажите, что тогда число* $\sin 12x$ *также является рациональным.*

Решение: Пусть

$$\sin 2x = a, \quad \sin 5x = b, \quad \sin 7x = c, \quad \sin 12x = d,$$
$$\cos 2x = X, \quad \cos 5x = Y, \quad \cos 7x = Z.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a = \sin 2x = \sin(7x - 5x) = cY - bZ, \\ b = \sin 5x = \sin(7x - 2x) = cX - aZ, \\ c = \sin 7x = \sin(5x + 2x) = bX + aY. \end{cases}$$

Решая систему, получим, что

$$Y = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2ac} \quad \text{и} \quad Z = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2ab}$$

являются рациональными числами, поскольку числа a, b, c — рациональные. Для решения задачи остается заметить, что $d = \sin 12x = \sin(5x + 7x) = bZ + cY$ — рациональное число.

Примечание: Числа x, синусы которых удовлетворяют условию задачи, существуют, так что задача корректно определена. Действительно, достаточно взять любое число x, для которого и $\sin x$, и $\cos x$ являются рациональными числами, например $x = \arcsin 0{,}6$. В этом случае все числа вида $\sin nx$ и $\cos nx$ $(n \in \mathbf{N})$ будут рациональны (доказывается индукцией по n).

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Не указан пример числа x, удовлетворяющего условию задачи	баллы не снижать
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов