

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2025 – 2026 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 10 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

10.1. Решите систему уравнений относительно неизвестных x, y, z (a и b — параметры):

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

10.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BI и CJ внутренних углов B и C этого треугольника. Из произвольной точки M , лежащей на отрезке IJ , опущены перпендикуляры: MN на AB , MP на AC и MQ на BC . Докажите, что верно равенство $MN + MP = MQ$.

10.3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и для любого значения $x \in [-1; 1]$ имеет место неравенство

$$\left| ax + \frac{b}{2}(1 - x^2) \right| \leq \max\{a, b\}.$$

10.4. На рёбрах $AD, BC, CC_1, C_1D_1, A_1B_1, AA_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрали точки P, Q, R, S, T, U соответственно так, что

$$\begin{aligned} \angle PQB = \angle RQC, \quad \angle RSC_1 = \angle TSD_1, \quad \angle TUA_1 = \angle PUA, \\ \angle QRC = \angle SRC_1, \quad \angle STB_1 = \angle UTA_1, \quad \angle UPA = \angle QPD. \end{aligned}$$

Найдите длину замкнутой ломаной $PQRSTUP$ если длина ребра куба равна 1.

10.5. Верно ли, что бесконечное множество квадратов со сторонами

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

можно разместить в большом квадрате со стороной 1 так, чтобы никакие маленькие квадраты между собой не пересекались?

10.6. Двадцать сосисок и десять сарделек соединили в одну незамкнутую цепочку в произвольном порядке. Владелец двух собак хочет перерезать цепочку в нескольких местах соединений так, чтобы можно было без дальнейших разрезов поделить сардельки и сосиски поровну между своими питомцами (т. е. по десять сосисок и по пять сарделек каждой собаке). Какого наименьшего числа разрезов ему заведомо хватит при любом расположении сарделек и сосисок в цепочке?