Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году
10 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

10.1. *Решите систему уравнений относительно неизвестных x, y, z (a и b — параметры):*

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

Решение: Из первого уравнения выражаем, например, z и подставляем в третье. После преобразований получим равносильное уравнение $(x+y)(a-x)(a-y) = 0$. Но из первого $x + y = a - z$, поэтому хотя бы одно из неизвестных равно a. Без ограничения общности $z = a$. Тогда $x + y = 0$ и из второго уравнения получаем, что $x^2 = b^2$. В итоге получаем решения $x = b$, $y = -b$, $z = a$ и ещё пять, получающихся из приведённого всевозможными перестановками x и y.

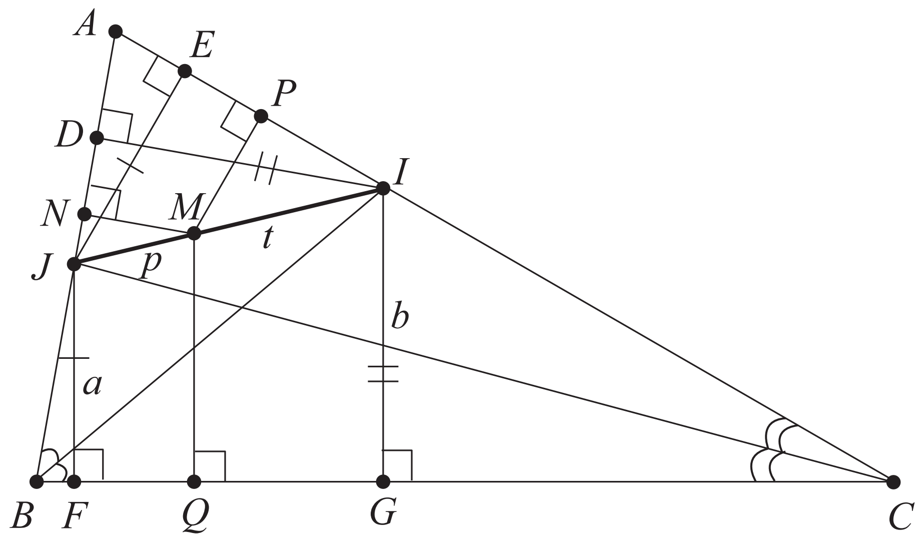
Ответ: $(b, -b, a)$, $(b, a, -b)$ $(-b, b, a)$ $(-b, a, b)$ $(a, b, -b)$ $(a, -b, b)$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получены не все шесть троек ответа, а только некоторые из них, т. е. учтены не все перестановки чисел x, y и z	6 баллов
Получено уравнение-следствие вида $f(x,y,z) = 0$ и его левая часть разложена на множители	3 балла
Верный ответ без обоснования ИЛИ хотя бы одна из шести троек ответа с проверкой, что она удовлетворяет системе	1 балл
Любые выкладки, не ведущие к решению, а также решения при конкретных значениях a и b	0 баллов

10.2. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы BI и CJ внутренних углов B и C этого треугольника. Из произвольной точки M, лежащей на отрезке IJ, опущены перпендикуляры: MN на AB, MP на AC и MQ на BC. Докажите, что верно равенство $MN + MP = MQ$.*

Решение: Опустим из точек I и J перпендикуляры: ID на AB, JE на AC, IG и JF на BC. По свойству биссектрисы $ID = IG = b$, $JF = JE = a$. Пусть, кроме того, $JM = p$, $MI = t$ (см. рисунок).



К решению задачи 10.2, построения в треугольнике

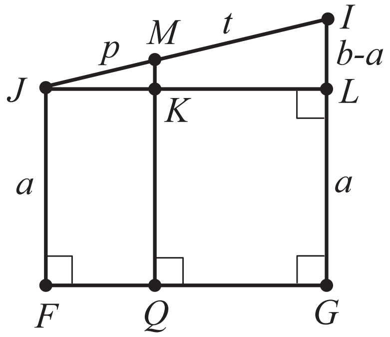
Тогда из подобия прямоугольных треугольников IPM и IEJ следует, что

$$MP = \frac{at}{t+p}.$$

Из подобия прямоугольных треугольников IDJ и MNJ следует, что

$$MN = \frac{bp}{t+p}.$$

Пусть $a > b$ (аналогично разбирается случай $a < b$). Рассмотрим прямоугольную трапецию $GFJI$. Её основания равны a и b. Проведём через вершину J прямую, параллельную FG, и пусть она пересекает отрезки QM и IG в точках K и L соответственно (см. рисунок).



К решению задачи 10.2, прямоугольная трапеция $GFJI$

Из подобия треугольников JKM и JLI находим

$$MK = \frac{p(b-a)}{p+t}.$$

Тогда

$$MQ = MK + KQ = \frac{p(b-a)}{p+t} + a = \\ = \frac{pb+at}{p+t} = MN + MP,$$

что и требуется доказать. Если же $a = b$, то $MQ = a = b$, а

$$MN + NP = \frac{at}{p+t} + \frac{ap}{p+t} = a,$$

то есть равенство выполняется и в этом случае тоже.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

10.3. *Докажите, что для любых положительных чисел a, b и для любого значения $x \in [-1; 1]$ имеет место неравенство*

$$\left|ax + \frac{b}{2}(1 - x^2)\right| \leqslant \max\{a, b\}.$$

Решение: В левой части стоит выражение вида $|f(x)|$, где $f(x)$ — квадратный трёхчлен. Посмотрим на него, как на функцию от x. Наибольшее значение этой функции на любом отрезке достигается или на концах отрезка, или в точке x_0 — вершине параболы — графика квадратного трёхчлена $f(x)$. Значения трёхчлена $f(x)$ на концах отрезка $[-1; 1]$ равны $f(-1) = a = f(1)$, что не больше a, и тем более не больше максимума из чисел a и b. Абсцисса вершины параболы равна $x_0 = \dfrac{a}{b}$. При $a > b$ она лежит вне отрезка $[-1; 1]$; в этом случае доказывать нечего. При $0 < a \leqslant b$ значение в вершине равно

$$\frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2} \leqslant \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b,$$

то есть тоже не больше максимума из чисел a и b.

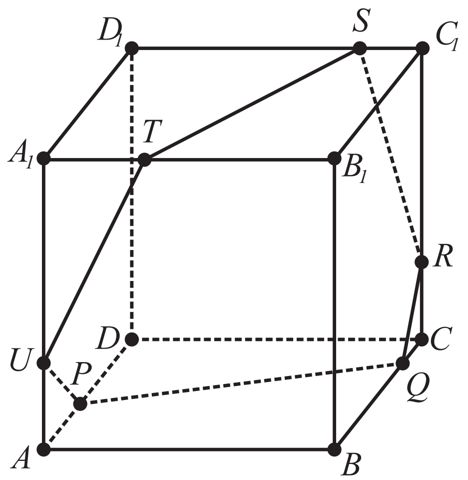
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Неравенство верно доказано в случае $a \leqslant b$ ИЛИ для полного решения не хватает только исследования функции на концах промежутка	5 баллов
Задача сведена к исследованию на отрезке $[-1; 1]$ квадратного трёхчлена $f(x) = ax + \dfrac{b}{2}(1 - x^2)$	3 балла
Доказано, что неравенство выполнено при $x = \pm 1$	1 балл
Утверждение проверено для нескольких конкретных пар (a, b)	0 баллов

10.4. *На рёбрах AD, BC, CC_1 C_1D_1, A_1B_1, AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбрали точки P, Q, R, S, T, U соответственно так, что*

$$\angle PQB = \angle RQC, \quad \angle RSC_1 = \angle TSD_1, \quad \angle TUA_1 = \angle PUA,$$
$$\angle QRC = \angle SRC_1, \quad \angle STB_1 = \angle UTA_1, \quad \angle UPA = \angle QPD.$$

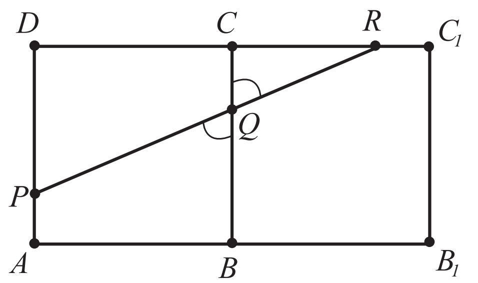
Найдите длину замкнутой ломаной $PQRSTUP$ если длина ребра куба равна 1.



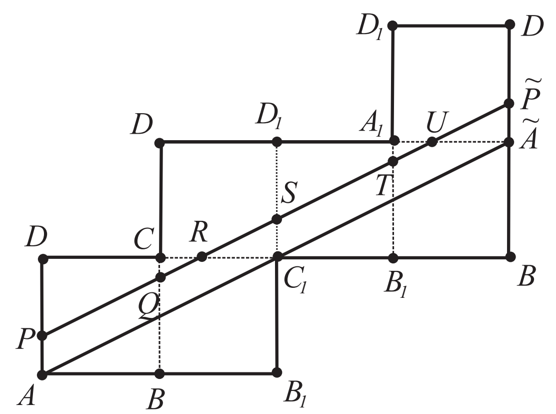
К решению задачи 10.4, расположение точек на кубе

Решение: Мысленно повернём грань BCC_1B_1 относительно ребра BC так, чтобы вся эта грань оказалась лежащей в плоскости ABC — см. рисунок. Из равенства углов $\angle PQB = \angle RQC$ следует, что эти углы (после поворота) стали вертикальными, поэтому точки P, Q и R теперь лежат на одной прямой — см. рисунок ниже слева.

Аналогично, после нужных поворотов других граней получим, что на одной прямой окажутся тройки точек R, S и T ($\angle RSC_1 = \angle TSD_1$), T, U и P ($\angle TUA_1 = \angle PUA$) и S, Q и R ($\angle QRC = \angle SRC_1$). Этого достаточно, чтобы на развёртке куба (см. рисунок ниже справа) все шесть точек оказались на одной прямой (равенство двух других пар углов из условия — лишнее данное; оно следует из четырёх остальных).



К решению задачи 10.4, равенство углов



К решению задачи 10.4, расположение точек на развёртке

Мы доказали, что длина ломаной $PQRSTUP$ равна длине отрезка $P\tilde{P}$ (см. рисунок выше справа). Так как четырёхугольник $P\tilde{P}\tilde{A}A$ — параллелограмм (его стороны PA и $\tilde{P}\tilde{A}$ равны и параллельны), эта длина равна длине отрезка $\tilde{A}A$. Последняя легко находится по теореме Пифагора: $\tilde{A}A = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{20}$.

Примечание 1: Из анализа решения видно, что

$$\frac{QC}{CR} = \frac{SC_1}{C_1R} = \frac{A_1T}{A_1U} = \frac{AP}{AU} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, можно найти углы между звеньями ломаной и рёбрами куба (они равны $\operatorname{arctg} 2$ и $\operatorname{arctg} 0{,}5$).

Примечание 2: Задача допускает и громоздкие технические решения: ввести неизвестные (например, $QC = x$, $CR = y$), через подобие треугольников найти остальные длины, составить уравнение и вывести соотношение между неизвестными, затем по теореме Пифагора подсчитать длины звеньев (как функцию от введённых переменных). При дальнейшем суммировании эта переменная уничтожится и получится нужная константа.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения есть арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Верно найдены углы между звеньями ломаной и рёбрами куба	4 балла
Имеется идея рассмотреть развёртку поверхности куба ИЛИ условие задачи верно выражено через введённые переменные — длины отрезков и величины углов	3 балла
Отмечено подобие хотя бы одной из пар треугольников: $\Delta TA_1U \sim \Delta UAP$, $\Delta QRC \sim \Delta SRC_1$ и выписано отношение пропорциональных сторон	2 балла
Верный ответ без обоснования (возможно, проиллюстрированный на частных примерах)	1 балл
Любые рассуждения и доп. построения, не ведущие к решению задачи	0 баллов

10.5. *Верно ли, что бесконечное множество квадратов со сторонами*

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

можно разместить в большом квадрате со стороной 1 *так, чтобы никакие маленькие квадраты между собой не пересекались?*

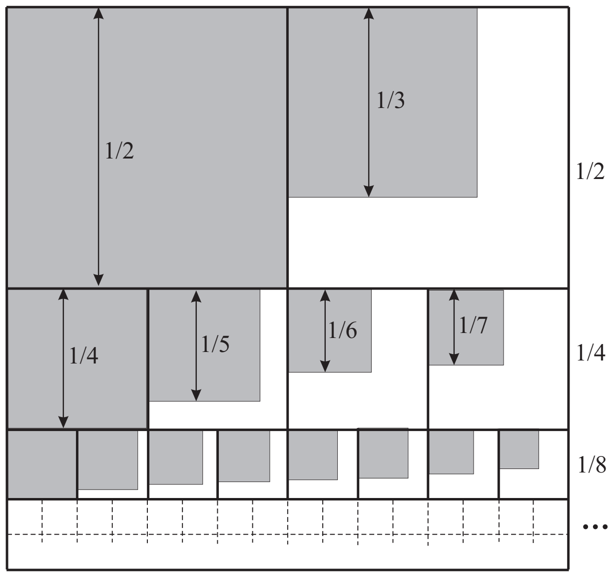
Решение: Разделим сторону квадрата со стороной 1 на отрезки длиной $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, и. т. д. (это возможно, так как сумма бесконечной геометрической прогрессии $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$ как раз 1). Через точки деления проведём прямые, параллельные другой стороне квадрата (см. рисунок).

Квадрат разделится на полосы; ширина i-й полосы равна $\frac{1}{2^i}$. Каждую из этих полос разрежем на квадраты той же ширины; из i-й полосы получится 2^i квадратов. В эти квадраты разместим (по одному в каждый) квадраты со сторонами

$$\frac{1}{2^i},\ \frac{1}{2^i+1},\ \frac{1}{2^i+2},\ \ldots,\ \frac{1}{2^i+2^i-1} = \frac{1}{2^{i+1}-1}.$$

Все квадраты уложены.

Ответ: верно.



К решению задачи 10.5

Примечание: В решении задачи по сути приведено доказательство, что ряд из квадратов чисел, обратных к натуральным, сходится $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i^2} < \infty\right)$, и его сумма не больше 2. В этом его ключевое отличие от гармонического ряда $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}$, сумма которого бесконечна.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верная конструкция приведена, (достаточно рисунка), но не обосновано, что она возможна	5 баллов
Ответ без обоснования ИЛИ неверные способы размещения	0 баллов

10.6. *Двадцать сосисок и десять сарделек соединили в одну незамкнутую цепочку в произвольном порядке. Владелец двух собак хочет перерезать цепочку в нескольких местах соединений так, чтобы можно было без дальнейших разрезаний поделить сардельки и сосиски поровну между своими питомцами (т. е. по десять сосисок и по пять сарделек каждой собаке). Какого наименьшего числа разрезов ему заведомо хватит при любом расположении сарделек и сосисок в цепочке?*

Решение: Если в цепочке с одного конца идут все сосиски, а с другого — сардельки, то потребуется хотя бы два разреза, так как надо и сардельки разделить, и сосиски, а одним разрезом этого не сделать. Покажем, что двух разрезов хватит при любом расположении сосисок и сарделек в цепочке. Обозначим сосиску буквой О, сардельку буквой А. Тогда любая цепочка представляет собой слово из 20 букв О и десяти букв А. Назовём любую группу подряд идущих букв в слове подсловом. Покажем, что в нашем слове можно найти 15-буквенное подслово, содержащее ровно 10 букв О — назовём такое подслово хорошим. (Этого достаточно для того, чтобы хватило двух разрезов: вырежем из цепочки кусок, соответствующий хорошему подслову, и отдадим его одной из собак, а второй отдадим остальное.) Рассмотрим первые пятнадцать букв слова. Если в них букв О ровно 10, хорошее подслово найдено. Пусть их меньше 10 (случай больше 10 рассматривается аналогично). Будем последовательно переходить к следующему 15-буквенному подслову, убирая одну букву слева и добавляя одну букву справа. Каждый раз будем считать количество букв О в рассматриваемом подслове. Заметим, что это количество увеличится на 1, если мы добавили букву О, а убрали букву А, уменьшится на 1, если добавили А, а убрали О, и не изменится, если мы добавили ту же букву, что и убрали. Таким образом, количество букв О меняется не более, чем на 1 (в ту или другую сторону). Последнее из рассматриваемых подслов состоит из последних 15 букв исходного слова, поэтому количество букв О в нём больше 10. Среди рассмотренных подслов найдём первое, в котором количество букв не меньше 10 (такое, очевидно, существует). Оно искомое, так как в предыдущем подслове букв О было меньше 10, а увеличится это количество может только на 1.

Ответ: два разреза.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказательство, что двух разрезов заведомо хватит, при этом не обосновано, что одного разреза в общем случае недостаточно	4 балла
Пример расположения сосисок-сарделек, при котором одного разреза не хватит, и доказательство этого факта	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Примеры расположения сосисок–сарделек, при которых достаточно одного разреза	0 баллов