Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2025 – 2026 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году

9 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

9.1. *На доске записано число* 20. *Каждую минуту с числом, записанным на доске, проделывают одну из четырёх операций: число либо умножают на* 2, *либо делят на* 2, *либо умножают на* 5, *либо делят на* 5. *Результат операции выписывают на доску, а предыдущее число стирают. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно* 250.

Решение:

Способ 1. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Каждую минуту в это выражение либо добавляется один из множителей 2 или 5, либо из него убирается один такой множитель (если в какой-то момент возникает дробное число, считаем, что множители, стоящие в знаменателе, находятся в отрицательном количестве, то есть, например, в числе $\dfrac{5}{4}$ один множитель 5 и минус два множителя 2). Значит, за чётное число минут чётность общего числа множителей не изменится, поэтому через 60 минут в числе будет по-прежнему нечётное количество простых множителей, в то время, как число $250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ состоит из четырёх таких множителей.

Способ 2. Предположим противное, и пусть всего было x умножений на 2, y умножений на 5, z делений на 2 и t делений на 5. Всего было сделано 60 операций, а в итоге получилось число $20 \cdot \dfrac{2^x}{2^z} \cdot \dfrac{5^y}{5^t}$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x + y + z + t = 60, \\ 20 \cdot \dfrac{2^x}{2^z} \cdot \dfrac{5^y}{5^t} = 250. \end{cases}$$

Второе уравнение системы приводится к виду $2^{x+1} \cdot 5^y = 2^z \cdot 5^{t+2}$. Отсюда (так как разложение любого числа на простые множители единственно) следует, что $x + 1 = z$, а $y = t + 2$. Подставив эти значения в первое уравнение системы, получим $2x + 2t + 3 = 60$, откуда $x + t = \dfrac{57}{2}$ — число не целое. Противоречие.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Условие задачи верно записано в виде уравнения (системы уравнений) в целых числах	3 балла
Замечено, что причина невозможности в чётности общего количества операций	2 балла
Доказываемое утверждение проиллюстрировано конкретными примерами	0 баллов

9.2. *Для квадратного трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами a и b при любом действительном значении x выполнено неравенство $p(x) \geqslant -0{,}9$. Докажите, что при любом действительном значении x выполнено и более сильное неравенство $p(x) \geqslant -0{,}25$.*

Решение:

Способ 1. Условие на квадратный трёхчлен означает, что дискриминант трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b + 0{,}9$, равный $a^2 - 4b - 3{,}6$, неположителен. А доказать требуется неположительность дискриминанта трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b + 0{,}25$, то есть неравенство $a^2 - 4b - 1 \leqslant 0$. Число $a^2 - 4b$ — целое, и при делении на 4 в остатке даёт либо 0, либо 1 (в зависимости от чётности числа a). Оно не больше 3,6, поэтому оно не больше 1, что и требовалось доказать.

Способ 2. Наименьшее значение квадратного трёхчлена с положительным старшим коэффициентом достигается в вершине параболы, то есть в точке с абсциссой $\frac{-a}{2}$. Возможны два случая.

1) Число a чётное. Тогда вершина параболы лежит в целочисленной точке, и значение трёхчлена в этой точке также является целым числом. Так как оно не меньше числа $-0{,}9$, то оно не меньше нуля. В этом случае весь трёхчлен лежит не ниже оси абсцисс, то есть значения во всех точках неотрицательны.

2) Число a нечётно. Тогда абсцисса вершины параболы — число полуцелое, и значение в этой вершине равно $-\frac{a^2}{4} + b = n - \frac{1}{4}$, где n — некоторое целое число. Так как это значение не меньше $-0{,}9$, число n не может быть отрицательным, поэтому значение квадратного трёхчлена в вершине (а тогда и во всех точках) не меньше $0 - \frac{1}{4} = -0{,}25$, что и требовалось доказать.

Примечание: Доказываемое неравенство не может быть усилено: для любого приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом, равным 1, (например, для $p(x) = x^2 + x$) его наименьшее значение будет в точности равным $-0{,}25$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно рассмотрен только случай чётного числа a	3 балла
Объяснено, что достаточно рассматривать значение $p(x)$ только в точке $x_0 = -a/2$ ИЛИ условие верно сведено к анализу дискриминантов двух квадратных трёхчленов	2 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также иллюстрация условия конкретными примерами	0 баллов

9.3. *Незнайка последовательно измерил расстояния от некоторой точки P внутри квадрата $ABCD$ до четырёх его вершин и получил числа 1 см, 4 см, 8 см, 7 см. Докажите, что Незнайка ошибся.*

Решение: Без ограничения общности пусть ближайшая к точке вершина квадрата левая верхняя. Тогда самая далёкая от неё – правая нижняя. Также можно считать, что правая верхняя ближе левой нижней. Пусть расстояния от точки до левой, верхней, правой и нижней сторон квадрата равны a, b, c и d см. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 64$, $a^2 + d^2 = 49$ и $b^2 + c^2 = 16$. Из четырёх уравнений одно является следствием трёх других, а из остальных получаем $b = \sqrt{1 - a^2}$, $d = \sqrt{49 - a^2}$, $c = \sqrt{15 + a^2}$. Так как $a + c = b + d$ (это длина стороны квадрата), отсюда имеем

$$a + \sqrt{15 + a^2} = \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{49 - a^2}.$$

Число $a \leqslant 1$, так как расстояние от точки до стороны не больше, чем расстояние от неё до вершины, лежащей на этой стороне. Но тогда левая часть меньше $1 + \sqrt{16} = 5$, а правая часть больше $\sqrt{48}$, что больше 5. Равенство невозможно, значит, Незнайка ошибся.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Получено, но не решено уравнение от одной переменной, верно описывающее полученные Незнайкой результаты	4 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

9.4. *В школе прошёл однокруговой шахматный турнир (каждый участник сыграл с каждым ровно один раз). В нём участвовали и мальчики, и девочки, причём девочек было в 3 раза больше. За выигрыш давалось одно очко, за ничью —*

пол-очка, за поражение – 0 очков. После окончания соревнований оказалось, что девочки в сумме набрали на 20% очков больше, чем мальчики. Какое минимальное количество школьников могло участвовать в турнире?

Решение: Чтобы не возиться с дробями, будем считать, что за победу давалось два очка, а за ничью — одно. Условие задачи при этом не изменится.

Пусть мальчики в сумме набрали a очков, тогда девочки набрали $1{,}2a$ очков, а доля очков, набранных мальчиками, равна

$$\frac{a}{2{,}2a} = \frac{5}{11}.$$

Пусть, кроме того, в турнире было $3x$ девочек и x мальчиков. Тогда общее количество партий турнира (оно вдвое меньше общего количества набранных очков) равно

$$\frac{4x(4x-1)}{2} = 2x(4x-1).$$

Следовательно, мальчики набрали

$$\frac{5}{11} \cdot 2 \cdot 2x(4x-1) = \frac{20x(4x-1)}{11}$$

очков. Это число целое, поэтому число $x(4x-1)$ обязано делится на 11. Наименьшее натуральное x с таким свойством — число 3.

Приведём пример турнира при $x = 3$. Пусть в турнире было 3 мальчика и 9 девочек. Мальчики выиграли все партии у девочек (27 партий) и набрали в партиях с девочками 54 очка. Ещё 6 очков они набрали в поединках между собой. В сумме мальчиками набрано 60 очков. Девочки набирали очки только в партиях между собой ($(9 \cdot 8)/2 = 36$ партий) и набрали 72 очка, что на 12 очков (или на 20%) больше, чем мальчики.

Примечание: Не очень сложно доказывается, что пример турнира, удовлетворяющего условию задачи, единственен: при $x > 3$ количество очков, набранных девочками в партиях между собой, превышает $6/11$ от общего количества разыгрываемых очков.

Ответ: 12 школьников.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример турнира, удовлетворяющего условию	4 балла
Доказано, что ситуация невозможна, если число мальчиков меньше трёх И/ИЛИ установлено какое-либо ограничение сверху на количество участников турнира (достаточно только мальчиков)	2 балла
Верный ответ без обоснования ИЛИ доказательство невозможности ситуации, когда мальчик один	1 балл
Замечание, что количество участников турнира кратно 4, а также любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

9.5. *Для какого наибольшего натурального числа n существует единственное натуральное число k, удовлетворяющее неравенству*

$$\frac{5}{6} < \frac{k}{n} < \frac{6}{7}\ ?$$

Ответ обоснуйте.

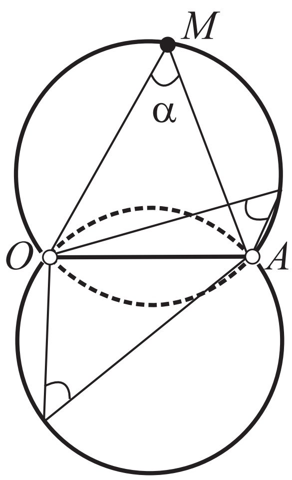
Решение: Так как $\frac{5}{6} = \frac{70}{84}$, $\frac{6}{7} = \frac{72}{84}$, то при $n = 84$ единственное число k, удовлетворяющее неравенству, это $k = 71$. При $n > 84$ на интервал $\left(\frac{5}{6}; \frac{6}{7}\right)$ длины $\frac{1}{42}$ целиком помещаются два отрезка длины $\frac{1}{n}$, поэтому если число $\frac{k-1}{n}$ — наибольшее число указанного вида, которое не больше $\frac{5}{6}$, то и число $\frac{k}{n}$, и число $\frac{k+1}{n}$ лежат в указанном интервале, значит, есть не менее двух чисел k удовлетворяющих неравенству из условия.

Ответ: 84.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано что при $n > 84$ существует более одного k, удовлетворяющих неравенству из условия	4 балла
Доказано, что $n = 84$ удовлетворяет условию задачи	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

9.6. *На разных сторонах прямого угла с вершиной O отметили точки A и B так, что $AO = OB$. Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри угла AOB и таких, из которых отрезки OA и OB видны под одинаковыми углами.*



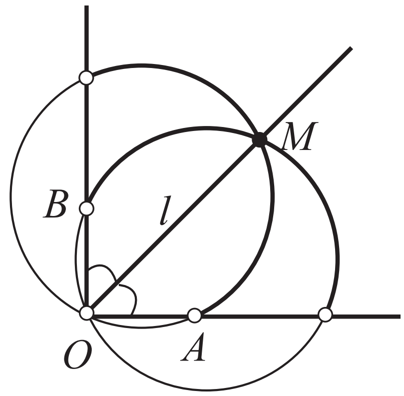
К решению задачи 9.6, ГМТ, откуда отрезок виден под заданным углом

Решение: Пусть точка M принадлежит требуемому ГМТ. Тогда $\angle AMO = \angle BMO = \alpha$. Рассмотрим четырёхугольник (возможно, невыпуклый) $AMBO$. Сумма его углов равна $360°$, $\angle O = 90°$, $\angle M = 2\alpha$. Отсюда $\alpha < 135°$.

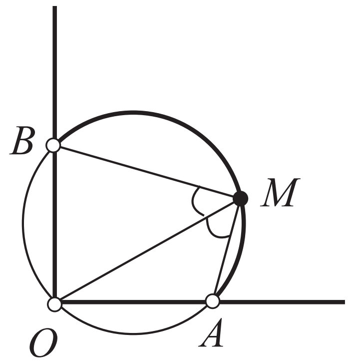
Геометрическим местом точек, из которых отрезок AO виден под углом α, является объединение двух равных дуг (без концов) окружностей — см. рисунок. Точка M находится на той дуге, которая лежит в полуплоскости с границей OA, содержащей точку B. Аналогично, точка M лежит на дуге окружности, из которой отрезок OB виден под тем же углом α и которая лежит в полуплоскости с границей OB, содержащей точку A.

Рассмотрим окружности, содержащие эти дуги. Возможно два случая.

1) Окружности различны. Тогда они симметричны относительно прямой l — биссектрисы угла AOB и имеют общую точку O. Вторая точка их пересечения также лежит на l. Следовательно, M лежит на биссектрисе угла AOB (см. рисунок слева). Отметим, что все точки биссектрисы входят в ГМТ: если $M \in l$, то треугольники MOA и MOB равны по двум сторонам и углу между ними.



К решению задачи 9.6, случай 1

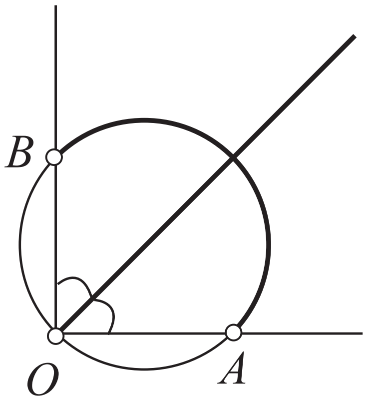


К решению задачи 9.6, случай 2

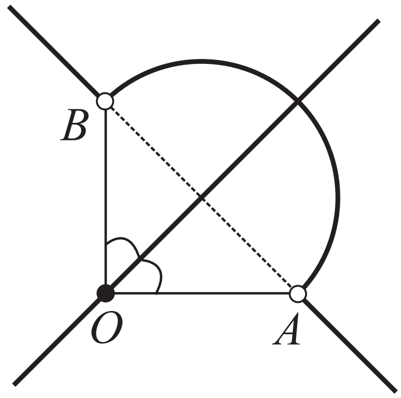
2) Окружности совпадают. Тогда эта общая окружность описана около треугольника AOB. Интересующие нас дуги имеют общую часть — дугу AB. Значит, точка M лежит на этой дуге. (см. рисунок справа). Все точки дуги (исключая их концы) входят в указанное множество: дуги OA и OB равны, так как стягиваются равными хордами, значит, для любой точки M дуги AB выполнено равенство $\angle AMO = \angle BMO$.

Мы доказали, что искомым геометрическим местом точек является объединение биссектрисы угла AOB и лежащей внутри угла дуги окружности, описанной около треугольника AOB — см. рисунок ниже слева. Это ответ.

Ответ:



Ответ к задаче 9.6



К примечанию к задаче 9.6

Примечание: Не очень сложно найти ГМТ всех точек плоскости, не обязательно лежащими внутри угла AOB, из которых отрезки AO и OB видны под равными углами. В этом случае множество будет иметь вид, изображённый на рисунке выше справа.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верно найдено требуемое ГМТ всех точек плоскости (не только лежащих внутри угла AOB)	баллы не снижаются
Обосновано, что искомое ГМТ лежит в объединении биссектрисы угла AOB и окружности с диаметром AB и доказан хотя бы один из фактов а) или б) критерия на 4 балла	6 баллов
Обосновано, что искомое ГМТ лежит в объединении биссектрисы угла AOB и окружности с диаметром AB	5 баллов
Доказано два факта: а) точки биссектрисы угла входят в нужное ГМТ б) точки полуокружности с диаметром AB входят в нужное ГМТ	4 балла
Доказан факт б) из критерия на 4 балла	3 балла
Доказан факт а) из критерия на 4 балла	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов