Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году

8 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

8.1. *В школе количество мальчиков составляет 40% (соответственно, девочки составляют 60%). Когда заболели 30% всех её учеников, школу закрыли на карантин. Известно, что 40% заболевших — это девочки. Кого в школе на момент введения карантина было больше: здоровых мальчиков или заболевших девочек? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Без ограничения общности можно считать, что в школе учатся 100 человек. Тогда мальчиков в школе 40 человек, а девочек 60. Заболело 30 человек, из которых ровно 12 девочек. Значит, заболело 18 мальчиков, здоровых мальчиков тогда осталось 22, что на 10 больше, чем заболевших девочек. Здоровых мальчиков больше.

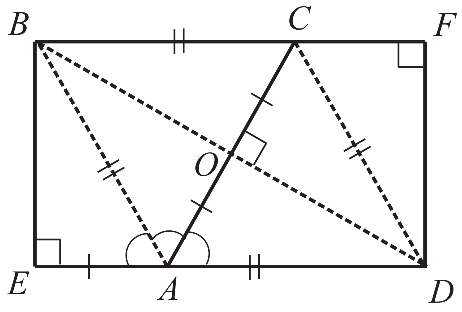
Способ 2. Пусть в школе n учеников, из которых на начало карантина m заболевших. Тогда всего в школе учится $0{,}4n$ мальчиков и $0{,}6n$ девочек. Заболели же $0{,}6m$ мальчиков и $0{,}4m$ девочек. Нам надо сравнить числа $0{,}4n-0{,}6m$ и $0{,}4m$. По условию $\frac{m}{n}=0{,}3$, то есть $m=0{,}3n$. Значит, $0{,}4n-0{,}6m=0{,}22n$, $0{,}4m=0{,}12n$. Первое число больше, значит, и здоровых мальчиков больше.

Ответ: здоровых мальчиков больше.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ (достаточно правильного примера)	7 баллов
При верном решении имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Задача верно сведена к решению уравнения в целых числах	3 балла
Верный ответ без обоснования	0 баллов

8.2. *Равнобедренный треугольник с углом в 120° сложен ровно из трёх слоев бумаги. Треугольник развернули — и получился прямоугольник. Нарисуйте такой прямоугольник и покажите пунктиром линия сгиба.*



К решению задачи 8.2

Решение: Рассмотрим ромб $ABCD$ с тупым углом $\angle A = 120°$. Из вершин B и D опустим перпендикуляры BE и DF на прямые AD и BC соответственно (см. рисунок). Получившийся прямоугольник $BEDF$ — искомый, а линии сгиба — суть отрезки BA, CD и BD (пунктирные линии на рисунке). Действительно, по свойствам диагоналей ромба имеем, что отрезки AC и BD перпендикулярны, а $\angle BAC = \angle CAD = 60°$. Тогда $\angle BAE = 180° - \angle BAD = 60° = \angle BAC$, и треугольники BEA и BOA равны по гипотенузе и острому углу (O — точка пересечения диагоналей ромба). Значит, при сгибании вдоль прямой BA треугольник BAE совместится с треугольником ABO. Аналогично, при сгибании вдоль прямой CD треугольник DCF совместится с треугольником DCO. Теперь в ромбе $ABCD$ треугольники ABO и CDO покрыты в два слоя бумаги, а треугольники ADO и BCO — в один. При третьем сгибании вдоль прямой BD совместятся треугольники COD и DOA, а также треугольники BOC и BOA. В итоге все точки треугольника BAD будут покрыты трижды. Очевидно, что треугольник ABD равнобедренный с углом $120°$, то есть именно тот, который нам и нужен.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Приведён верный рисунок, из которого видны отношения, в которых линии перегиба делят стороны, и углы их наклона	7 баллов
Приведён примерный рисунок (без указаний пропорций отрезков или углов) и не объяснено, почему он соответствует условию задачи	3 балла
Неверные конструкции (в любом количестве)	0 баллов

8.3. *Действительные числа a и b таковы, что*

$$a^2 - b^2 = a^3 + b^3 \quad \text{и} \quad a^3 - b^3 = a^4 + b^4.$$

Чему может равняться произведение ab? (Найдите все возможные значения и докажите, что других нет.)

Решение:

Способ 1. Перемножим левые и правые части равенств

$$a^3 + b^3 = a^2 - b^2 \quad \text{и} \quad a^3 - b^3 = a^4 + b^4.$$

Получим уравнение-следствие

$$a^6 - b^6 = a^6 + a^2b^4 - b^2a^4 - b^6 \Leftrightarrow a^2b^2(b^2 - a^2) = 0.$$

Отсюда либо одна из переменных равна 0 (что возможно, например, $a = b = 0$ — очевидное решение системы), и тогда $ab = 0$, либо $b = \pm a \neq 0$. В последнем случае подставив значение b во второе уравнение, получим пару $a = 1$, $b = -1$, которая также является одним из решений системы. Значит, в этом случае $ab = -1$.

Способ 2. Преобразуем первое уравнение равносильным образом:

$$a^2 - b^2 = a^3 + b^3 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = -b \text{ или } a - b = a^2 - ab + b^2.$$

Теперь обратимся к второму уравнению. В первом случае ($a = -b$) оно превращается в уравнение $2a^3 = 2a^4$, откуда или $a = 0$, или $a = 1$. Получаем два решения: $a = b = 0$ или $a = 1$, $b = -1$. Во втором случае ($a - b = a^2 - ab + b^2$) левая часть второго уравнения равна

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2,$$

поэтому уравнение примет вид $a^2b^2 = 0$. В этом случае одна из переменных равна 0, и с учётом равенства $a - b = a^2 - ab + b^2$ получаем пары $a = b = 0$, $a = 0$, $b = -1$, и $a = 1$, $b = 0$. Значит, ab может принимать только два значения: 0 или -1.

Ответ: 0 или -1.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Получены линейные или квадратные (относительно переменных a и b) уравнения-следствия	4 балла
Приведены удовлетворяющие условию пары (a, b), при которых получаются оба ответа: 0 и -1	2 балла
Приведена удовлетворяющая условию пара (a, b) и найден один из ответов 0 или -1	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

8.4. *На круговой дорожке стадиона тренируются Валера на самокате и Серёжа на велосипеде. Скорость Серёжи в* 1,65 *раза больше скорости Валеры. Они стартовали из одной точки стадиона в одном и том же направлении и движутся с постоянными скоростями. В скольких разных точках дорожки происходят их встречи, если тренировка продолжается достаточно долго? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Пусть длина всей дорожки равна 1. Найдём на каких расстояниях от точки старта будут происходить встречи Валеры и Серёжи. Их n-ая ($n \in \mathbf{N}$) по счёту встреча означает, что Серёжа проехал больше, чем Валера ровно на n кругов, то есть проехал расстояние на n больше, чем Валера. Пусть до n-ой встречи Валера проехал расстояние a. Так как скорость Серёжи больше скорости Валеры в 1,65 раза, то до встречи Серёжа проехал расстояние $1{,}65a$, что на величину $1{,}65a - a = 0{,}65a = \dfrac{13}{20}a$ больше, чем Валера. Таким образом, условие, что спортсмены встретились, записывается уравнением $\dfrac{13}{20}a = n$, откуда $a = \dfrac{20n}{13}$. От точки старта точка n-ой встречи отстоит на величину $\{a\}$ — дробную часть a. Дробная часть чисел вида $a = \dfrac{20n}{13}$ — это или 0, или правильная дробь со знаменателем 13. Все такие дроби можно получить, подбирая подходящие n. Поэтому всего точек встреч 13.

Способ 2. Пусть Серёжа проезжает дорожку за 100 единиц времени. Тогда по условию Валера проезжает её за 165 таких единиц. Найдём через сколько единиц времени Серёжа и Валера впервые одновременно окажутся в точке старта. Это — наименьшее натуральное число, которое нацело делится и на 100, и на 165, то есть наименьшее общее кратное этих чисел. Оно равно 3300. За это время Серёжа проедет $3300 : 100 = 33$ круга, Валера $3300 : 165 = 20$ кругов, то есть Серёжа обгонит Валеру ровно $33-20 = 13$ раз. Покажем, что все точки обгона будут различны. От противного, пусть некоторая точка обгона встретилась дважды. Тогда мы можем считать эту точку точкой старта, и, повторив предыдущее рассуждение, получим, что следующее её одновременное посещение гонщиками наступит через 3300 единиц времени, что неверно. Итак, за первые 3300 единиц времени на дорожке будет ровно 13 точек встречи. Дальнейшее движение новых точек не добавит, так как 14-я встреча произойдёт на месте первой, 15-ая на месте второй и т. д.

Способ 3. Пусть длина дорожки равна l метров, скорости Валеры и Серёжи равны соответственно x и $1{,}65x$ метров в секунду, а первая встреча состоялась спустя t секунд после старта. До первой встречи Серёжа проехал ровно на l метров, чем Валера. Уравнением это записывается так: $1{,}65xt - xt = l$, откуда $t = \dfrac{20l}{13x}$. Значит, до встречи Валера проехал ровно $\dfrac{20}{13}$ всей дорожки. Так как скорости спортсменов постоянны, до следующей встречи Валера проедет такое же расстояние, до третьей — ещё раз такое же и т. д. Теперь установим на дорожке 13 столбов на равном расстоянии друг от друга (один в точке старта). Встречи будут происходить как раз у этих столбов, причём каждый раз Валера будет проезжать 20 из них (это полный круг и ещё 7 столбов). Значит, если занумеровать столбы числами от 0 до 12 в направлении движения гонщиков, то встречи будут происходить последовательно у столбов с номерами 7, 14 (он же 1), 8, 15 (он же 2), 9, 16 (он же 3), 10, 17 (он же 4), 11, 18 (он же 5), 12, 19 (он же 6), 13 (он же 0), то есть у каждого столба какая-то встреча состоится.

Ответ: в 13 точках.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном решении имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Задача сведена к решению уравнения с целой (или с дробной) частью числа	3 балла
Верно найдено некоторые (не все) точки встреч спортсменов	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также ответ без обоснования	0 баллов

8.5. *На огромном экране компьютера выписаны всевозможные последовательности из восьми цифр от* 00 000 000 *до* 99 999 999 *(каждая последовательность выписана один раз). Красным шрифтом записаны те последовательности, у которых сумма всех цифр, стоящих на чётных местах, равняется сумме всех цифр, стоящих на нечётных местах. Курсивом записаны те последовательности, сумма всех цифр в которых в точности равна* 36. *Докажите, что последовательностей, записанных красным шрифтом, столько же, сколько записанных курсивом.*

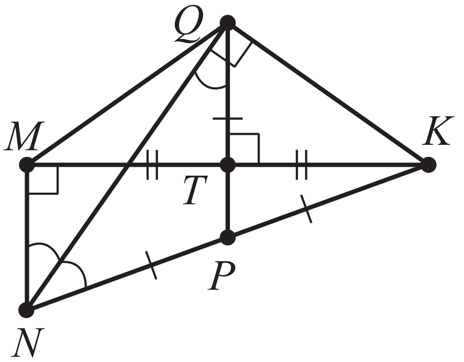
Решение: Каждой выписанной последовательности $AB\ CDE\ FGH$ (A, B, C, D, E, F, G, H — цифры, не обязательно различные) поставим в соответствие последовательность $A(9-B)\,C(9-D)E\,(9-F)G(9-H)$. Это соответствие будет взаимно-однозначным, то есть разным исходным последовательностям будут соответствовать разные. Выясняется, что если последовательность $AB\,CDE\,FGH$ записана красным шрифтом, то $A+C+E+G=B+D+F+H$, что выполнено тогда и только тогда, когда сумма цифр последовательности, поставленной ей в соответствие, равна $A+9-B+C+9-D+E+9-F+G+9-H=36$. То есть каждой последовательности, записанной красным цветом, поставлена в соответствие своя последовательность, записанная курсивом, и наоборот. Значит, тех и других последовательностей поровну.

Примечание: Некоторые последовательности (например, 33 445 566) будут выписаны красным курсивом. На рассуждение, приведённое в решении выше, это не влияет. Заметим ещё, что при указанной в решении операции последовательности, которая выписана красным курсивом, соответствует другая такая же последовательность. Поэтому можно изначально все такие последовательности из рассмотрения исключить, и доказательство также останется корректным.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Имеется идея взаимно-однозначного соответствия последовательностей последовательностей обоих видов	3 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

8.6. *В прямоугольном треугольнике MNK точки P и T — середины гипотенузы NK и катета MK соответственно. Биссектриса угла MNK пересекает прямую PT в точке Q. Докажите, что треугольники KQM и NPQ подобны.*



К решению задачи 8.6

Решение: Прямая PQ является серединным перпендикуляром к отрезку MK (см. рисунок), поэтому треугольник KQM равнобедренный. $PQ \parallel MN$, поэтому $\angle NQP = \angle MNQ = \angle QNP$, то есть треугольник NPQ также равнобедренный. Для доказательства подобия, следовательно, достаточно установить равенство углов MKQ и QNP. Из равнобедренности треугольника NPQ и того факта, что P — середина NK следует, что треугольник PKQ тоже равнобедренный (а треугольник NQK прямоугольный). Подсчёт углов:

$$\angle MKQ = \angle PKQ - \angle PKM = 90^\circ - \angle KNQ - (90^\circ - \angle MNK) =$$
$$= \angle MNK - \angle KNQ = \angle MNQ = \angle KNQ$$

завершает доказательство.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Доказана равнобедренность треугольника PKQ (или доказано, что $\angle NQK = 90^\circ$)	3 балла
Доказана равнобедренность треугольника NQP	2 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов