Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2025 – 2026 учебном году

7 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

7.1. *Математик Иванов на 6 лет старше своей жены программиста Ивановой. Однажды Иванов обнаружил, что ровно половину своей жизни он провел в браке с Ивановой. Ровно через 14 лет после этого Иванова обнаружила, что она провела в браке с Ивановым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет математику Иванову и программисту Ивановой, когда он и она отпразднуют золотую свадьбу — пятидесятилетие своей супружеской жизни? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть на момент времени, когда Иванов провёл в браке с Ивановой половину своей жизни, Иванову было $2x$ лет. Тогда свадьба состоялась, когда ему было x лет, а Ивановой $x - 6$. Следовательно, на момент времени, когда Иванова пробыла замужем две трети своей жизни, ей было $3(x-6)$ лет, Иванову было $3(x-6)+6 = 3x-12$, и, по условию задачи, $3x-12 = 2x+14$, откуда $x = 26$. Золотая свадьба будет отпразднована, когда Иванову будет $x + 50 = 76$ лет, а Ивановой на 6 лет меньше, то есть 70.

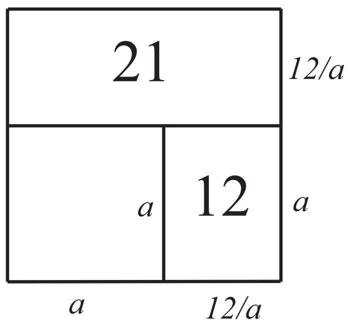
Ответ: 76 лет Иванову и 70 — Ивановой.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения верен, но есть арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Условие задачи верно записано с помощью уравнения (или системы уравнений), которое решено неверно (или не решено)	3 балла
Верный ответ с проверкой, что такая ситуация возможна (нет обоснования, что он единственный)	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

7.2. *От бумажного квадрата отрезали прямоугольник площади* 21*, а затем от оставшейся части квадрата еще отрезали прямоугольник площади* 12*. В результате появился маленький квадрат. Какова его площадь? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть длина стороны маленького квадрата a. Тогда вторым отрезанием был отрезан прямоугольник, одна из сторон которого a (см. рисунок). Его



К решению задачи 7.2

площадь равна 12, поэтому вторая сторона равна $\dfrac{12}{a}$, а сторона исходного квадрата равна $a+\dfrac{12}{a}$. Значит, площадь отрезанного первый раз прямоугольника равна

$$\left(a+\frac{12}{a}\right)\left(a+\frac{12}{a}-a\right)=21.$$

Отсюда $a=4$, и площадь оставшегося квадрата равна 16.

Ответ: 16.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Условие задачи верно записано с помощью уравнения (или системы уравнений), которое решено неверно (или не решено)	3 балла
Верный ответ и верный пример квадрата с указанием разрезов	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

7.3. *В кружке конструкторов занимаются* 40 *школьников. У каждого из них есть болтики, винтики и гвоздики. Известно, что кружковцев, у которых количество гвоздиков не равно количеству болтиков, ровно* 15 *человек. Школьников, у которых количество винтиков равно количеству гвоздиков, ровно* 10. *Докажите, что есть не менее* 15 *школьников, у которых количество винтиков не равно количеству болтиков. Ответ обоснуйте.*

Решение: Из 40 школьников кружка ровно у 15 количество гвоздиков не равно количеству болтиков. Рассмотрим остальных 25 кружковцев. У каждого из них гвоздиков и болтиков поровну. Если у кого-то из этих 25 винтиков и болтиков одинаковое количество, то у него поровну винтиков и гвоздиков. По условию таких школьников не может быть больше 10. Исключим их из рассмотрения. Остаётся по крайней мере 15 человек, у которых число винтиков не равно числу болтиков. Утверждение доказано.

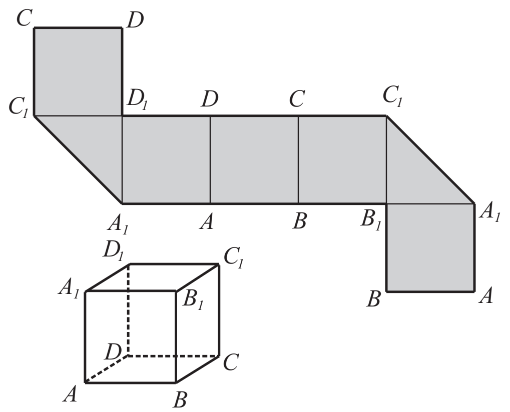
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Доказано, что минимум у 25 школьников поровну гвоздиков и болтиков	3 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

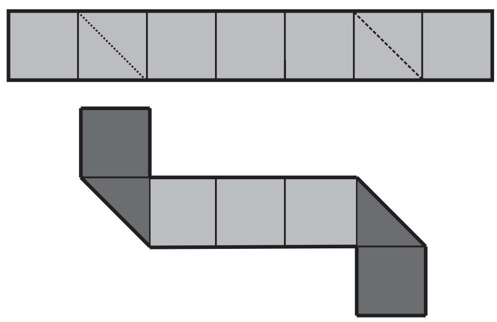
К условию задачи 7.4

7.4. *Имеется полоска двустороннего скотча размером 7 см × 1 см (см. рисунок). Её можно как угодно перегибать, но нельзя рвать. Как полностью обклеить ею поверхность деревянного кубика с ребром 1 см? Укажите все места перегибов и развёртку полоски после них.*

Решение: Одной из возможных развёрток куба является следующая (см. рисунок слева, сгибы идут по границам квадратов). Такую развёртку легко свернуть из полосы 1 на 7, перегибая второй и шестой квадрат по диагонали. (см. рисунок справа, для наглядности противоположные стороны полоски покрашены разными цветами).



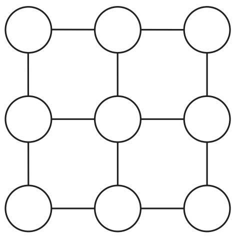
К решению задачи 7.4, вид развертки


К решению задачи 7.4, места перегибов

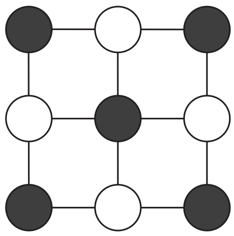
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Приведена развёртка и показаны места перегибов ИЛИ есть верное объяснение, как обклеить кубик	7 баллов
Примеры неверного обклеивания кубика	0 баллов

7.5. *Девять ячеек соединены отрезками так, как показано на рисунке. В этих ячейках записаны все натуральные числа от 1 до 9 (по одному числу в ячейке), но неизвестно, в какой ячейке какое число стоит. За один ход разрешается* *выбрать две ячейки, соединённых отрезком, и добавить к записанным в них числам по* 1. *Может ли случиться, что после нескольких операций все девять чисел, стоящих в ячейках, будут нацело делиться на* 2025*? Ответ обоснуйте.*



К условию задачи 7.5



К решению задачи 7.5

Решение: Раскрасим ячейки в «шахматном» порядке (см. рисунок) и заметим, что на каждом ходе сумма чисел, стоящих в чёрных ячейках увеличивается на ту же величину, что и сумма чисел в белых ячейках. Таким образом, разность этих сумм всё время остаётся неизменной (это инвариант задачи).

Если в какой-то момент времени все 9 чисел будут кратны числу 2025, то и упомянутая разность будет делиться на 2025 нацело. Но эта разность по модулю не превосходит числа

$$(9+8+7+6+5)-(1+2+3+4)=25.$$

Значит, она обязана равняться нулю, то есть сумма чисел в белых ячейках должна быть равна сумме цифр в чёрных, что верно и для начальной позиции. Но тогда сумма чисел во всех ячейках должна быть чётна, в то время как на самом деле она равна 45. Предположение, что числа во всех ячейках кратны 2025, привело к противоречию. Значит, этого не может быть.

Ответ: не может.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	**Баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обнаружен инвариант — разность сумм в чёрных и белых ячейках	3 балла
Приведено решение для нескольких конкретных расстановок чисел	2 балла
Верный ответ без обоснования	0 баллов

7.6. *Червяк считается взрослым, если его длина* 1 *метр. Взрослого червяка можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью* 1 *метр в час каждый. Когда длина червяка достигает* 1 *метра, он прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить десять взрослых червяков быстрее, чем за* 1 *час? Ответ обоснуйте. Не взрослых червей резать нельзя: обе части погибнут.*

Решение:

Способ 1. Для удобства считаем, что резать начинаем в полночь, в 00 часов 00 минут. Отрежем от червяка $\frac{1}{512}$, и назовём большую часть *базовой*. Далее действуем так: на отрезанную малую часть, равно как и все части, которые в дальнейшем будем отрезать от базовой, внимания не обращаем, дожидаемся пока базовая часть не станет взрослым червём и отрезаем от неё очередной кусок. Величины отрезаемых кусков каждый раз удваиваем. Так как скорость роста у всех кусков одна и та же, то время между последовательными отрезаниями тоже будет каждый раз увеличиваться вдвое. Первый раз базовой части надо нарастить $\frac{1}{512}$ м, и на это уйдёт $\frac{1}{512}$ часа. Во второй раз базовой части надо будет наращивать уже $\frac{1}{256}$ м, и на это уйдёт $\frac{1}{256}$ часа. Дальнейшие промежутки (в часах) $\frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \ldots, \frac{1}{4}$. В этот момент делаем последний разрез, деля базовую часть пополам (при этом базовая часть дальше будет вести себя как последний отрезанный кусок). Всего сделано 9 разрезов, значит, получилось 10 кусков. n-ый по счёту отрезанный кусок ($1 \leqslant n \leqslant 9$) был отрезан в

$$\underbrace{\frac{1}{512} + \frac{1}{256} + \ldots}_{n-1 \text{ слагаемое}} = \frac{1}{512}(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}) =$$

$$= \frac{1}{512}(2^{n-1} - 1) = -2^{-9} + 2^{n-10}$$

часов и имел на тот момент длину $\frac{1}{2^{10-n}}$. Для достижения взрослости ему требуется отрастить $1 - \frac{1}{2^{10-n}}$ метров длины, и на это уйдёт $1 - \frac{1}{2^{10-n}} = 1 - 2^{n-10}$ часа, следовательно, состояния взрослости он достигнет в момент времени (в часах)

$$1 - 2^{-9} + 2^{n-10} + 1 - 2^{n-10} = 1 - \frac{1}{512},$$

то есть все куски (включая базовый) достигнут взрослости в одно и то же время, чуть меньшее часа ночи.

Примечание: как ясно из решения, за 1 час можно вырастить любое наперёд заданное количество червей.

Способ 2. Покажем, как за час вырастить **любое** наперёд заданное количество червяков. Так как скорость роста любой отрезанной части одинакова, эта часть за t часов вырастает на t метров ($0 \leqslant t \leqslant 1$) независимо от своей длины (или стабилизируется на длине 1 м, если достигнет за время t взрослого состояния). Пусть мы хотим вырастить за час n червей. Тогда пропускаем $\frac{1}{2^n}$ часа и отрезаем от взрослого червяка $\frac{1}{2^n}$ метра. Отрезанный кусок за оставшиеся $1 - \frac{1}{2^n}$ часа увеличится на $1 - \frac{1}{2^n}$ и достигнет длины ровно 1 м. Больший кусок станет взрослым червем через $\frac{1}{2^n}$ часа после отрезания, что составляет $\frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ часа с момента отсчёта времени. Отрежем от него $\frac{1}{2^{n-1}}$ метра. Опять меньшая часть достигнет метровой длины ровно через 1 час с начала отсчёта времени, а большая через $\frac{1}{2^{n-2}}$ часа станет взрослым червём. Отрежем от неё $\frac{1}{2^{n-1}}$ метра и т. д. Последний разрез делаем спустя полчаса, разрезая взрослого червя пополам. В итоге через час после начала каждая отрезаемая часть превратится во взрослого червя.

Способ 3. Пустим время вспять, то есть пусть, начиная, например, с часу дня, 10 червяков уменьшают свою длину с постоянной скоростью 1 метр в час каждый, а мы можем «склеивать» двух червяков в тот момент когда их суммарная длина станет равна 1 м. Наша цель — получить не позже, чем к полудню одного взрослого червяка. Тогда в 12-30 у нас останется 10 червяков длиной 1/2 м. Склеим двух из них — получим одного метрового червяка и 8 полуметровых. В 12-15 метровый червяк уменьшится до 75 см, а длины всех остальных станут равными 25 см. После склейки останутся один метровый червяк и семь 25-сантиметровых. Следующую склейку проведём в 12 часов 7 минут 30 секунд и т. д. Когда до 12-00 останется $\frac{1}{512}$ часа, у нас и останется только один однометровый червяк.

Ответ: можно.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Приведён верный алгоритм получения 10 червей и объяснено, почему черви станут взрослыми через час	7 баллов
Приведён верный алгоритм получения 10 червей, но объяснение, почему он удовлетворяет условию, неверно или отсутствует	5 баллов
Верный ответ без обоснования, а также любые утверждения, не ведущие к решению	0 баллов