

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2024–2025 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 10 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

10.1. Трое друзей Сережа, Валера и Женя сыграли несколько партий в настольный теннис (в каждой партии двое играли, а один наблюдал за игрой). Количество партий, сыгранных Серёжей, Валерой и Женей, в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Всего друзьями было сыграно 30 партий. Сколько партий Серёжа сыграл с Женей? Ответ обоснуйте.

10.2. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в непараллельных плоскостях и имеют попарно непараллельные стороны. Прямые, соединяющие соответственные вершины (A с A_1 , B с B_1 и C с C_1), пересекаются в одной точке. Докажите, что продолжения соответственных сторон этих треугольников попарно пересекаются, и точки их пересечения лежат на одной прямой.

10.3. Решите уравнение

$$x^2 = a\sqrt{x^2 - b^2} + b\sqrt{x^2 - a^2}.$$

(a и b — неотрицательные действительные числа.)

10.4. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку E , а на стороне BC — точку K . Точку пересечения отрезков EC и AK обозначили буквой O . Оказалось, что площадь треугольника AEO равна 3, площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника OKC равна 2. Найдите площадь треугольника ABC . Ответ обоснуйте.

10.5. Последовательность чисел $\{x_n\}$ задана рекуррентно:

$$x_1 = 1, \quad (2^{-n} - x_{n+1})(2^{-n} + x_n) = 4^{-n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Найдите сумму

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{100}}.$$

10.6. Группа шахматистов участвовала в нескольких турнирах (в каждом турнире число участников могло отличаться). По итогам каждого турнира были определены три лучших шахматиста (т. е. три призёра). Ни один шахматист не смог стать призёром сразу во всех турнирах. Но в любых двух турнирах нашёлся ровно один участник, который смог стать призёром в обоих турнирах. Докажите, что наибольшее количество турниров, в которых могли принять участие шахматисты, равно семи.