Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024 – 2025 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024 – 2025 учебном году

7 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

7.1. *От пункта A до пункта B 15 км. Из A в B в* 9.30 *отправился пешеход, идущий со скоростью* 4 *км/ч. На следующий день в* 11 *часов он отправился в обратный путь и шёл со скоростью* 5 *км/ч. Каждый раз он проходил по мосту, находящемуся на этой дороге, в одно и то же время. Определите показание часов при прохождении пешеходом моста.*

Решение:

Способ 1. Создадим машину времени, и перенесём пешехода из второго дня во вчерашний. Тогда он встретит самого себя вчерашнего как раз на мосту. При этом к $11:00$ (времени его выхода из пункта B) вчерашний пешеход пройдёт уже $1{,}5 \cdot 4 = 6$ км, и будет находится от B на расстоянии 9 км. Эти 9 км пешеходы, сближаясь со скоростью 4+5=9 км/ч, пройдут ровно за час, следовательно, встретятся в $12:00$.

Способ 2. Пусть t — показание часов в момент появления пешехода на мосту (t измеряем в часах). Тогда в первый день пешеход прошёл расстояние $4(t-9{,}5)$ км, во второй — $5(t-11)$ км. Из уравнения $4(t-9{,}5)+5(t-11)=15$ находим, что $t=12$.

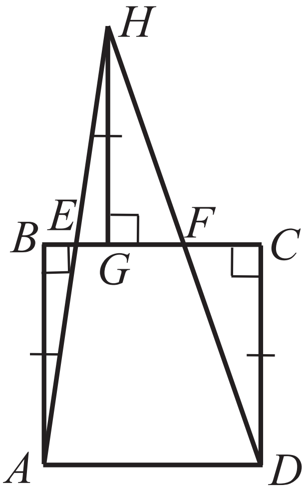
Ответ: $12:00$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Верно составлено, но не решено (или решено неверно) уравнение, позволяющее найти время встречи	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

7.2. *Разрежьте бумажный квадрат на три части, из которых можно сложить треугольник с тремя острыми углами и различными сторонами. Резать можно как угодно, а отрезанные куски можно переворачивать. Покажите, как разрезать, и обоснуйте, что из полученных трёх частей можно сложить требуемый треугольник.*

Решение: Пусть $ABCD$ — данный квадрат. Отметим на одной из его сторон (пусть на стороне BC) точки E и F (E между B и F) так, чтобы $2EF = BC$ и $BE \neq FC$. Пусть G — точка на отрезке EF такая, что $BE = EG$, тогда $GF = FC$— см. рисунок.



К решению задачи 7.2

Разрежем квадрат по отрезкам AE и DF. Получим трапецию $AEFD$ и два треугольника ABE и DCF. Поставим треугольники на отрезок EF, так как показано рисунке. Тогда их бóльшие катеты совпадут и образуют отрезок GH. Так как $\angle AEB = \angle HEG$, ломаная AEH является прямой. Аналогично HFD — прямая, и фигура AHD действительно является треугольником. То, что все его острые, немедленно следует из построения. В силу условия $BE \neq FC$, треугольники ABE и DCF не равны, поэтому $AE \neq DF$ и $AH = 2AE \neq 2DF = DH$. Значит, стороны треугольника AHD различны (то, что его сторона AD меньше двух остальных, очевидно).

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Приведено верное разрезание, показано, как из полученных частей сложить треугольник, и доказано, что получившийся треугольник остроугольный и разносторонний	7 баллов
Приведено верное разрезание, показано, как из полученных частей сложить треугольник, но не обосновано, что получится треугольник с требуемыми свойствами	5 баллов
Приведено верное разрезание, но не показано, как из полученных частей сложить треугольник	3 балла
Требуемое разрезание отсутствует	0 баллов

7.3. *Белоснежка попросила семерых гномов построиться по росту в колонну по одному: первый гном — самый высокий, последний — самый низкий. Шестеро гномов так и встали, но потом пришёл седьмой и встал позади одного из более низких гномов, тем самым нарушив требуемый порядок. Сколькими способами могли построиться гномы, если известно, что все они разного роста? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Рассмотрим гнома, который пришёл последним. Этот гном не может быть самым низким, так как он встал позади того, кто ниже его. Пусть он второй по росту (снизу). Тогда он встал последним — вариант единственный. Пусть гном третий снизу по росту — тогда он может встать на последнее или предпоследнее место в строю — два варианта. Вообще, если рассматриваемый гном k-й снизу по росту ($1 \leqslant k \leqslant 7$), то он мог занять место позади любого гнома, который его ниже — $k-1$ вариант. Всего имеем $0+1+2+3+\cdots+6=21$ вариантов расстановки.

<u>Способ 2.</u> Пусть тот гном, который опоздал, (обозначим его X) встал в колонну k-м ($2 \leqslant k \leqslant 7$). Выше него могут быть только гномы, стоящие перед тем, за кем встал гном X. Таких гномов $k-2$, и поэтому гном X — один из $k-1$ самых высоких. Иными словами, на k-м месте может стоять один из $k-1$ гномов, при этом расстановка всех остальных однозначно определена. Получается $k-1$ вариант расстановки. Суммируя по k, получаем общее число возможных расстановок:

$$\sum_{k=2}^{7}(k-1)=1+2+\cdots+6=21.$$

Ответ: 21-м способом.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Замечена, но не доказана закономерность: количество таких расстановок для n гномов — n-е треугольное число, равное $\left(\text{равное } \dfrac{n(n-1)}{2}\right)$	2 балла
Верно определено количество расстановок гномов, в которых последний гном стоит на k-м месте ИЛИ в которых последний гном — k-й по росту (не для всех $k=\overline{1,7}$)	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

7.4. *Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на* 3, 4, …, 9 *даёт остатки* 1, 2, …, 7. *Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть N — натуральное число, которое при делении на 3, 4, …, 9 даёт остатки 1, 2, …, 7 (не обязательно наименьшее). Рассмотрим число $N+2$. Оно будет без остатка делиться на 3, 4, …, 9, то есть делится нацело на наименьшее общее кратное этих чисел. Это наименьшее общее кратное равно произведению $9\cdot 8\cdot 7\cdot 5=2520$. Наименьшее натуральное число, кратное 2520 это само число 2520. Значит, наименьшее число N, удовлетворяющее условию задачи, 2518.

Ответ: 2518.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	6 баллов
Указан ключевой факт: число, на 2 большее искомого, должно быть кратным всем числам 3, 4, ..., 9	4 балла
Верный ответ с проверкой, что число 2518 даёт нужные остатки при делении на все числа 3, 4, ..., 9	2 балла
Верно найдено наименьшее общее кратное всех девяти чисел 3, 4, ..., 9	1 балл
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

7.5. *Среди девяти внешне одинаковых монет восемь настоящих, а одна фальшивая — ровно на 1 г легче остальных. Есть трое чашечных весов, но одни из них сломаны — одна из чашек тяжелее другой на 1 г. Как с помощью четырёх взвешиваний определить фальшивую монету? Сломанные весы по внешнему виду отличить нельзя.*

Решение: Разделим монеты на три группы А, Б, В по три монеты в каждой. Первыми двумя взвешиваниями сравним веса двух групп (скажем, А и Б) на двух разных весах. Возможны три случая.

1) Весы показали разный результат. Тогда среди них одни сломаны. С помощью третьих весов (они исправны) за два взвешивания находим фальшивую монету: сначала, сравнивая веса групп А и Б, находим тройку монет, в которой фальшивая, затем сравнивая две монеты из этой тройки, определим фальшивую.

2) Весы оба раза показали равновесие. Тогда и те, и другие весы исправны, а фальшивая монета в группе В. Нам хватит трёх взвешиваний.

3) Оба взвешивания показали, что одна из групп (скажем, А) легче. Тогда фальшивая монета точно в группе А, а какие весы фальшивые, мы не знаем по-прежнему. Сравним третьим взвешиваниям на любых весах по одинаковому количеству монет из групп Б и В. Если весы покажут равновесие — они исправны, иначе — нет, но тогда исправны остальные двое весов. Четвёртым взвешиванием на исправных весах двух монет из группы А найдём фальшивую монету.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведён верный алгоритм решения задачи и доказано, что его применение позволяет задачу решить	7 баллов
Приведён верный алгоритм решения задачи, но не для всех случаев показано, почему он решит задачу	4 балла
Алгоритмы, которые «работают» не всегда	0 баллов

7.6. (Фольклор.) *Альпинист с верёвкой длиной* 80 *метров находится на скале высотой* 100 *метров над землёй и хочет с помощью только одной этой верёвки спуститься вниз. На скале два колышка: один на вершине скалы, а другой — на выступе в* 50 *метрах от вершины. За колышки можно зацепить верёвку, а на выступе альпинист может стоять или сидеть, ни за что не держась. Кроме того, у альпиниста есть нож, позволяющий резать верёвку. Предположим, что Вы являетесь этим альпинистом. Предложите безопасный вариант спуска. Предполагается, что на скале Вы один; прыгать, летать и рвать на себе одежду не стоит.*

Решение: Вам надо разрезать верёвку на две части: короткую, чуть меньше 30 метров, и длинную, чуть больше 50 метров. Короткую верёвку привяжите одним к концом к колышку на вершине скалы, а на втором её конце сделайте петлю. Через эту петлю пропустите длинную часть верёвки и свяжите концы длинной части друг с другом, так, чтобы получилось кольцо. Получится верёвка длины около $30 + 50 : 2 = 55$ метров, причём её нижняя 25-метровая часть двойная. Держась за эту верёвку, Вы спуститесь на уступ. Стоя на уступе, разрежьте верёвочное кольцо и вытяньте длинную часть верёвки. Тогда у Вас в руках будет более, чем 50-метровая верёвка. Привяжите её одним концом к колышку на уступе, и с помощью этой верёвки спускайтесь вниз.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный алгоритм спуска	7 баллов
Указана идея спуска на выступ, держась за два конца верёвки, чтобы спустившись, вытянуть часть верёвки для дальнейшего спуска	3 балла
Отмечено, что альпинисту нужно попасть на выступ скалы, имея в руках более 50 м «свободной» верёвки	1 балл
Неверные (неосуществимые) алгоритмы спуска	0 баллов