Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024 – 2025 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024 – 2025 учебном году
6 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

6.1. *В одной сказочной стране в паспортном столе выходные дни: понедельник, среда, а также все числа месяца, которые не имеют других делителей кроме себя и единицы. Могут ли в некоторый момент года выходные в паспортном столе длиться больше десяти дней подряд? Ответ обоснуйте.*

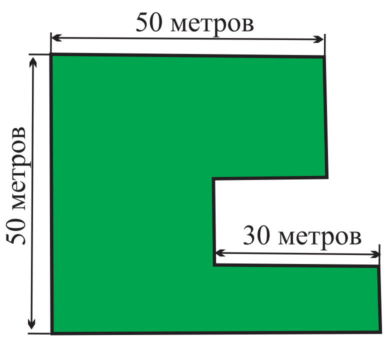
Решение: Предположим, что в некотором году 28 октября (или любого другого месяца, в котором 31 день) пришлось на понедельник. Тогда на понедельник приходится ещё и 4 ноября, а 30 октября и 6 ноября будет среда. Эти 4 дня выходные. Между ними стоят даты 29 октября, 31 октября, 1 ноября, 2 ноября, 3 ноября, 5 ноября — все они выходные, так как эти числа месяца, которые не имеют других делителей кроме себя и единицы. Также выходным будет и 7 ноября. Итого все 11 дней (4 последних дня октября и первые 7 дней ноября) — выходные.

Ответ: Могут.

Примечание: Можно доказать (для решения задачи этого не требуется), что больше 11 дней подряд выходные идти не могут, и что приведённый в решении пример — единственный.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный пример 11-и последовательных выходных дней	7 баллов
Неверный ответ или верный ответ, не подкреплённый примером	0 баллов



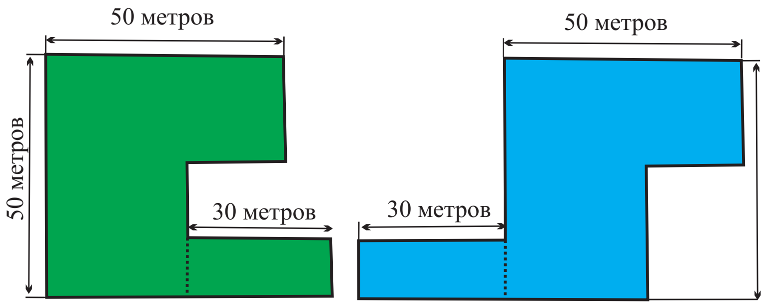
К условию задачи 6.2

6.2. *На рисунке изображена схема участка, огороженного по всему периметру забором. Найдите общую длину забора.*

Решение:

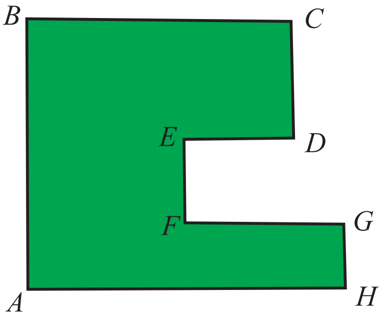
Способ 1. Отрежем от участка выступающий снизу прямоугольный кусок и перенесём его влево — получим участок другой формы — см. рисунок ниже.

Видно, что периметр правого и левого участков одинаков. Периметр правого легко находится: сумма горизонтальных участков — удвоенная длина проекции на горизонтальную прямую ($2 \cdot (50 + 30) = 160$ м), сумма вертикальных — удвоенная длина проекции на вертикальную прямую ($2 \cdot 50 = 100$ м). Значит, весь периметр равен $160 + 100 = 260$ м.



К решению задачи 6.2, способ 1

<u>Способ 2.</u> Обозначим вершины ломаной, ограничивающей участок, так, как показано на рисунке.



К решению задачи 6.2, способ 2

По условию $AB = BC = 50$, $FG = 30$ (все длины в метрах). Заметим, что

$$CD + EF + GH = AB = 50.$$

Пусть $DE = x$. Тогда $AH = BC + FG - DE = 80 - x$, а весь периметр равен

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA =$$
$$= 50 + 50 + (CD + EF + GH) + x + 30 + 80 - x = 260.$$

Ответ: 260 м.

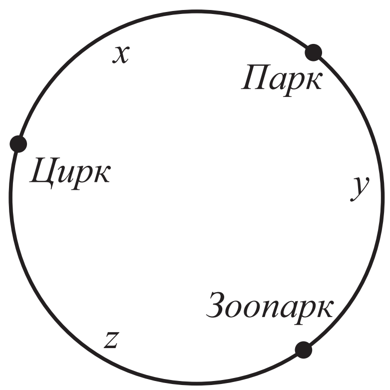
<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения верен, но имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Верно найдена только сумма длин горизонтальных участков	4 балла
Верно найдена только сумма длин вертикальных участков	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

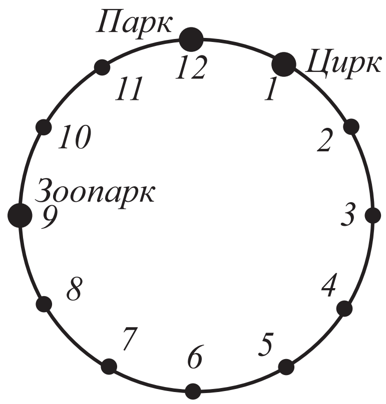
6.3. *В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На линии есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка (через Зоопарк или не через Зоопарк) короче и во сколько раз? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Выберем на кольцевой ветке то направление, в котором остановки расположены в порядке Цирк — Парк — Зоопарк. Пусть в этом направлении расстояние от Цирка до Парка x, от Парка до Зоопарка y и от Зоопарка до Цирка z — см. рисунок ниже. Тогда условие задачи запишется в виде системы уравнений $3y = x + z$, $2(x + y) = z$, а требуется сравнить числа x и $y + z$. Имеем $z = 2x + 2y$, $3y = x + 2x + 2y$, откуда $y = 3x$, а $z = 8x$. Значит, $y + z = 11x$, то есть путь от Парка до Цирка через Зоопарк длиннее в 11 раз.



К решению задачи 6.3, способ 1



К решению задачи 6.3, способ 2

Способ 2. Можно считать, что кольцевая линия идёт по окружности циферблата, а остановка Парк находится на числе «12». От Парка до Зоопарка через Цирк втрое длиннее, чем в другом направлении, то есть эта дорога занимает три четверти окружности, 9 часов. Можно считать, следовательно, что Зоопарк находится на цифре «9», а Цирк на дуге «12» — «5» — «9» (см. рисунок выше). Дуга от Цирка до Зоопарка через Парк составляет треть всей окружности, 4 часа. Значит, Цирк находится в цифре «1», и путь от Цирка до Парка напрямую составляет 1 час, а от через Зоопарк — 11 часов.

Ответ: Путь от Парка до Цирка через Зоопарк длиннее в 11 раз.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верный ответ проиллюстрирован конкретным примером (графически или численно), т. е. указаны расстояния между всеми тремя остановками	5 баллов
Условие задачи верно записано в виде системы линейных уравнений	3 балла

Указано, что выполнены два условия: а) остановки «Парк» и «Зоопарк» делят кольцевую линию в отношении 1:3; б) остановки «Цирк» и «Зоопарк» делят кольцевую линию в отношении 1:2	2 балла
Указано одно из соотношений а) или б) (см. критерий на 2 балла)	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

6.4. *У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил* 100 *г йода, другому —* 101 *г мёда, а третьему —* 102 *г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар клал на другую. Могло ли оказаться, что каждая гирька легче* 90 *г? Ответ обоснуйте.*

Решение: Это возможно, если веса гирек равны 49,5 г, 50,5 г и 51,5 г. Действительно в этом случае две самые лёгкие гирьки в сумме дают 100 г, две самые тяжёлые — 102 г, а самая лёгкая и самая тяжёлая — 101 г.

Ответ: Это возможно.

Примечание: Можно показать, упорядочивая гирьки по весу и решая систему уравнений, что приведенный в решении набор гирь единственно возможный.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верно указан набор гирь, но не показано, как с их помощью взвесить требуемые количества товара	6 баллов
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

6.5. *Каждый из шести рыцарей враждует ровно с двумя другими. Рыцари, враждующие между собой, хотят отравить друг друга. Докажите, что рыцарей можно рассадить за круглый стол так, что ни один из них не будет отравлен. Рыцарь может подсыпать яд только в бокал своего соседа.*

Решение:

Способ 1. Пусть места за столом (по кругу) обозначены

А — Б — В — Г —Д — Е

Посадим любого из рыцарей на место А, а тех, с кем он враждует — на места В и Д. Если рыцари, сидящие на местах В и Д враждуют между собой, то они не враждуют с остальными, и остальных рыцарей можно посадить на места Б, Г, Е в любом порядке. Если же это не так, то среди трёх остальных рыцарей есть один враг для рыцаря, сидящего на месте В и один — для рыцаря сидящего на месте Д. Эти два рыцаря – разные люди, ибо в случае, если это один и тот же рыцарь, то у двух оставшихся не найдётся достаточного числа врагов. Посадим врага рыцаря В на место Е, врага рыцаря Д — на место Б, и задача решена.

Способ 2. Рассмотрим граф (шестиугольник с занумерованными вершинами), где вершины рыцари, а ребра (отрезки, соединяющие вершины) соединяют враждующих рыцарей. Так как степень каждой вершины 2 (из нее выходят два отрезка к враждующим рыцарям), этот граф (шестиугольник) распадается на циклы (замкнутые ломаные линии). 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 1, либо два непересекающихся: 1 — 2 — 3 — 1 и 4 — 5 — 6 — 4.

В обоих случаях рассадка 1 — 4 — 2 — 6 — 3 — 5 — 1 делает невозможным отравление.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Приведён верный алгоритм рассадки рыцарей в обоих случаях: а) рыцари образуют две тройки, в которых все являются врагами; б) враждующие рыцари образуют цикл из 6 человек	7 баллов
Приведён верный алгоритм рассадки рыцарей только в одном из случаев «а», «б» (см. пункт на 7 баллов)	3 балла
Рассуждения, не ведущие к доказательству	0 баллов