Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024 – 2025 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024 – 2025 учебном году 10 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

10.1. *Трое друзей Сережа, Валера и Женя сыграли несколько партий в настольный теннис (в каждой партии двое играли, а один наблюдал за игрой). Количества партий, сыгранных Серёжей, Валерой и Женей, в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Всего друзьями было сыграно 30 партий. Сколько партий Серёжа сыграл с Женей? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть x, y и z — количество партий, сыгранных соответственно Серёжей с Валерой, Серёжей с Женей и Валерой с Женей. По условию $x+y+z=30$. Серёжа сыграл $x+y$ партий, Валера — $x+z$ партий, Женя — $y+z$ партий. Так как эти числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, а всякий член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое предыдущего и последующего её членов, имеем равенство $2(x+z)=(x+y)+(y+z)$, откуда $x+z=2y$. Тогда $x+y+z=3y=30$, то есть $y=10$.

Ответ: 10 партий.

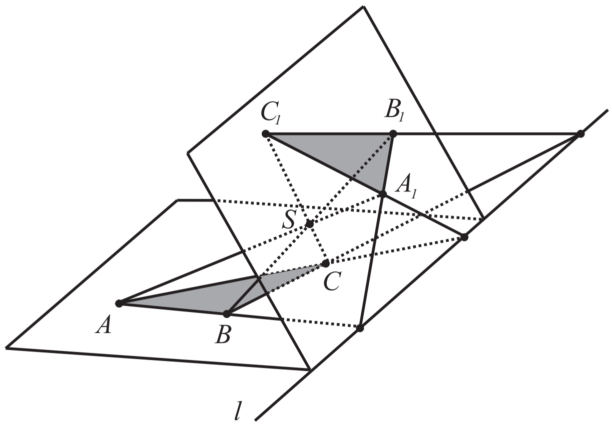
Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	6 баллов
Условие задачи верно записано в виде уравнения или системы уравнений	3 балла
Верный ответ проиллюстрирован верным примером	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

10.2. *Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в непараллельных плоскостях и имеют попарно непараллельные стороны. Прямые, соединяющие соответственные вершины (A с A_1, B с B_1 и C с C_1), пересекаются в одной точке. Докажите, что продолжения соответственных сторон этих треугольников попарно пересекаются, и точки их пересечения лежат на одной прямой.*

Решение: Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости треугольников, S — точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 — см. рисунок. Тогда прямые AB и A_1B_1 лежат в плоскости SAB, поэтому, будучи непараллельными, пересекаются в некоторой точке. Эта точка лежит одновременно в плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$, то есть лежит на прямой l. Аналогичные рассуждения показывают, что прямые

AC и A_1C_1 также пересекаются на прямой l, и это же утверждение верно для прямых BC и B_1C_1.



К решению задачи 10.2

Примечание: Утверждение, которое требуется доказать в задаче, называется *теоремой Дезарга*. Разумеется, ссылка школьника на эту теорему (или на двойственную к ней) является не решением, а только переформулировкой условия, поэтому положительными баллами быть оценена не может.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказан только факт пересечения прямых AB и A_1B_1 (или AC и A_1C_1, или CB и C_1B_1)	3 балла
Показано, что прямые AB и A_1B_1 (или другая аналогичная пара) лежат в одной плоскости	2 балла
Замечено (достаточно рисунка), но не доказано, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1 (или AC и A_1C_1, или CB и C_1B_1) лежат на прямой, по которой пересекаются плоскости треугольников	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

10.3. *Решите уравнение*

$$x^2 = a\sqrt{x^2 - b^2} + b\sqrt{x^2 - a^2}.$$

(a и b — неотрицательные действительные числа.)

Решение:

Способ 1. Пусть $t = x^2$, $t \geqslant \max\{a^2, b^2\}$. Проведём равносильные преобразования

$$t = a\sqrt{t - b^2} + b\sqrt{t - a^2};$$

$$t=\frac{(t\sqrt{a-b^2}+b\sqrt{t-a^2})(a\sqrt{t-b^2}-b\sqrt{t-a^2})}{a\sqrt{t-b^2}-b\sqrt{t-a^2}};$$
$$t=\frac{a^2(t-b^2)-b^2(t-a^2)}{a\sqrt{t-b^2}-b\sqrt{t-a^2}};$$
$$1=\frac{a^2-b^2}{a\sqrt{t-b^2}-b\sqrt{t-a^2}};$$
$$a\sqrt{t-b^2}-b\sqrt{t-a^2}=a^2-b^2.$$

Сложив левые и правые части исходного и полученного уравнений, получим уравнение – следствие: $t-2b\sqrt{t-a^2}=a^2-b^2$. Положив $s=\sqrt{t-a^2}$ получим $s^2+a^2-2bs=a^2-b^2$; $s=b$. Тогда $t=b^2+a^2$ и $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$. Проверкой убеждаемся, что такие x действительно являются корнями исходного уравнения.

<u>Способ 2.</u> Так как обе части уравнения неотрицательны, будет равносильным переходом возведение обеих частей в квадрат. Получим

$$x^4=a^2(x^2-b^2)+b^2(x^2-a^2)+2ab\sqrt{(x^2-b^2)(x^2-a^2)}$$
$$x^4-a^2x^2-b^2x^2+2b^2a^2-2ab\sqrt{x^4-b^2x^2-a^2x^2+b^2a^2}$$

Замена $t=\sqrt{x^4-b^2x^2-a^2x^2+b^2a^2}$ приводит к квадратному уравнению

$$t^2+a^2b^2-2abt=0,$$

которое, как легко убедиться, имеет единственный корень $t=ab$. Но тогда

$$t^2=a^2b^2=x^4-b^2x^2-a^2x^2+b^2a^2 \leftrightarrow x^2(x^2-a^2-b^2=0),$$

откуда либо $x=0$, либо $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$. Но $x=0$ входит в область допустимых значений уравнения только при $a=b=0$, и в этом случае оно совпадает с двумя другими корнями. Что касается, корней $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$, то проверка показывает, что оба они являются корнями исходного уравнения.

<u>Способ 3.</u> Уравнение не изменится при замене x на $-x$, поэтому достаточно решить уравнения для случая $x\geqslant 0$. Если $x=0$, то получим равенство $0=a\sqrt{-b^2}+b\sqrt{-a^2}$, которое возможно лишь при $a=b=0$. Пусть $x>0$. Тогда преобразуем уравнение равносильным способом:

$$x^2=a\sqrt{x^2-b^2}+b\sqrt{x^2-a^2} \leftrightarrow 1=\frac{a}{x}\sqrt{1-\frac{b^2}{x^2}}+\frac{b}{x}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

Из того, что подкоренные выражения неотрицательны, следует, что числа $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{x}$ лежат в отрезке $[0\,;1]$. Значит, можно полагать, что

$$\frac{a}{x}=\sin\alpha \quad \text{и} \quad \frac{b}{x}=\sin\beta$$

для некоторых углов α, $\beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Уравнение имеет вид

$$1 = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \leftrightarrow 1 = \sin(\alpha+\beta).$$

Так как α и β лежат в первой координатной четверти, отсюда следует, что $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = \cos\beta$, то есть

$$\frac{a}{x} = \sqrt{1 - \frac{b}{x}} \leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^2} = 1 \leftrightarrow x = \sqrt{a^2+b^2}.$$

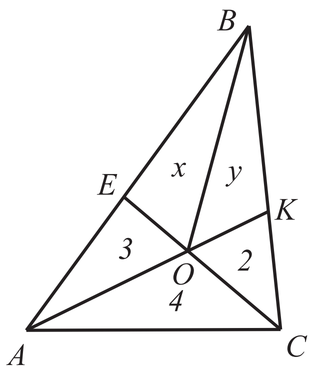
Проверка показывает, что такое x действительно являются корнем уравнения, единственным положительным его корнем. Ещё заметим, что при $a = b = 0$ он обращается в 0, то есть случай $x = 0$ также включается в это равенство.

Ответ: $x = \pm\sqrt{a^2+b^2}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Случай $x = 0$ (эквивалентно $a = b = 0$) отдельно не разобран	баллы не снижать
При верном ходе решения рассмотрен только случай $x \geqslant 0$ (т. е. «утеряно» $x = -\sqrt{a^2+b^2}$)	6 баллов
Решение верно сведено к решению некоторого квадратного уравнения	4 балла
Проверено, что число $x = \sqrt{a^2+b^2}$ (и/или $x = -\sqrt{a^2+b^2}$) является корнем исходного уравнения	1 балл
Преобразования уравнения, из которых не виден путь решения, а также решения уравнений при конкретных значениях a и b	0 баллов

10.4. *В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку E, а на стороне BC — точку K. Точку пересечения отрезков EC и AK обозначили буквой O. Оказалось, что площадь треугольника AEO равна 3, площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника OKC равна 2. Найдите площадь треугольника ABC. Ответ обоснуйте.*



К решению задачи 10.4, способ 1

Решение:

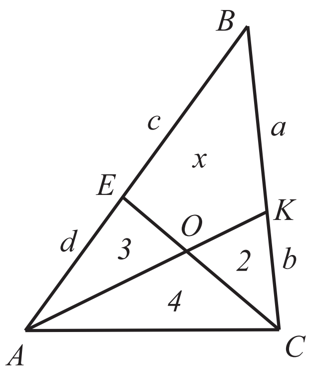
Способ 1. Проведем BO и обозначим через $x = S_{EBO}$ и $y = S_{BKO}$ — см. рисунок.

Воспользуемся свойством: если в треугольнике из одной вершины проведена прямая, то отношение площадей треугольников, на которые эта прямая делит треугольник, равно отношению отрезков, на которые она делит противоположную сторону треугольника. Применим это свойство для треугольников AEO и AOC (а потом для треугольников EBO и BOC) и для треугольников AOC и OKC (а потом для треугольников ABO и BKO). Далее все просто:

$$\frac{EO}{OC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x}{y+2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x = 3y + 6.$$

$$\frac{AO}{OK} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{x+3}{y} = \frac{4}{2} \Rightarrow x + 3 = 2y.$$

Решая систему, получаем $x = \dfrac{21}{5}$, $y = \dfrac{18}{5}$, $S_{ABC} = 2 + 3 + 4 + \dfrac{21}{5} + \dfrac{18}{5} = 16\dfrac{4}{5}$.



К решению задачи 10.4, способ 2

Способ 2. Обозначим отрезки BK, KC, BE и EA через a, b, c и d соответственно. Пусть также x площадь четырёхугольника $BEOK$ — см. рисунок.

Воспользуемся несколько раз свойством: «если два треугольника имеют общую вершину, а противоположные ей стороны лежат на одной прямой, то отношение длин этих сторон равно отношению площадей треугольников». Рассмотрим пары треугольников:

1) ABK и ACK. Получим

$$\frac{a}{b} = \frac{x+3}{6};$$

2) CBE и CAE. Получим

$$\frac{c}{d} = \frac{x+2}{7};$$

3) AEO и ACO. Получим

$$\frac{EO}{OC} = \frac{3}{4};$$

4) COA и COK. Получим

$$\frac{KO}{OA} = \frac{1}{2}.$$

Запишем теорему Менелая для треугольника CBE и секущей AK:

$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CO}{OE} \cdot \frac{EA}{AB} = 1;$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{CO}{OE} \cdot \frac{d}{d+c} = 1;$$

$$\frac{x+3}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x+2}{7}} = 1.$$

Решая полученное уравнение, находим, что $x = 7{,}8$. Тогда $S_{ABC} = 16{,}8$.

Ответ: 16,8.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	6 баллов
Решение задачи верно и обосновано сведено к решению системы линейных уравнений	5 баллов
Обосновано хотя бы одно из равенств $AO:OK = 4:2$ или $CO:OE = 2:3$	2 балла
Задача решена при дополнительных предположениях о виде треугольника	0 баллов

10.5. *Последовательность чисел* $\{x_n\}$ *задана рекуррентно:*

$$x_1 = 1, \qquad (2^{-n} - x_{n+1})(2^{-n} + x_n) = 4^{-n} \ (n \in \mathbf{N}).$$

Найдите сумму

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{100}}.$$

Решение:

Способ 1. Раскрыв скобки в равенстве получим

$$x_n - x_{n+1} = 2^n x_n x_{n+1} \leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = 2^n \ (n \in \mathbf{N}).$$

Обозначим $a_n = \dfrac{1}{x_n}$, тогда $a_{n+1} - a_n = 2^n$ $(n \in \mathbf{N})$, и требуется найти $\sum\limits_{i=1}^{100} a_i$. Решение уравнения $a_{n+1} - a_n = 2^n$ будем искать в виде $a_n = A \cdot 2^n + B$. С учетом условия $a_1 = 1$ для чисел A и B получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A & = & A + 1, \\ 1 & = & 2A + B. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1$, $B = -1$, $a_n = 2^n - 1$,

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{100} 2^i - 100 = 2 \cdot \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} - 100 = 2^{101} - 102.$$

Способ 2. Раскрыв скобки в равенстве получим $x_n - x_{n+1} = 2^n x_n x_{n+1}$. Вычислим несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, заметим закономерность

$$x_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

Докажем её методом математической индукции. База индукции: при $n = 1$

$$a_1 = \frac{1}{2^1 - 1} = 1,$$

верно. Индуктивный переход:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2^n x_n + 1}.$$

Если для некоторого номера n верно, что

$$x_n = \frac{1}{2^n - 1}, \quad \text{то} \quad x_{n+1} = \frac{\dfrac{1}{2^n - 1}}{\dfrac{2^n}{2^n - 1} + 1} = \frac{1}{2^n + 2^n - 1} = \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

Шаг индукции доказан.

Теперь $\dfrac{1}{x_n} = 2^n - 1$ и искомая сумма легко находится:

$$2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \ldots + 2^{100} - 1 = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{100} - 100 = 2^{101} - 102.$$

Ответ: $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{100} - 100 = 2^{101} - 102.$

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в незамкнутой форме: $2 + 2^2 + \cdots + 2^{100} - 100$	6 баллов
ход решения верен, но реально подсчитана сумма не 100, а 99 или 101 слагаемого	5 баллов
Получен верный ответ с использованием недоказанной формулы $x_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$ (или $\dfrac{1}{x^n} = 2^n - 1$)	4 балла
Замечена, но не доказана формула n-го члена последовательности $x_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

10.6. *Группа шахматистов участвовала в нескольких турнирах (в каждом турнире число участников могло отличаться). По итогам каждого турнира были определены три лучших шахматиста (т. е. три призёра). Ни один шахматист не смог стать призёром сразу во всех турнирах. Но в любых двух турнирах нашелся ровно один участник, который смог стать призёром в обоих* *турнирах. Докажите, что наибольшее количество турниров, в которых могли принять участие шахматисты, равно семи.*

Решение: Покажем, что ни один участник не мог стать призёром более трёх раз. Предположим, это не так, и некоторый шахматист A стал призёром хотя бы в 4-х турнирах (назовём их *замечательными*). По условию 8 остальных призёров этих четырёх турниров — разные шахматисты. Рассмотрим турнир, в котором шахматист A призёром не стал (такой по условию задачи есть). Тогда среди трёх его призёров должны быть представители призёров каждого из 4-х замечательных турниров, то есть 4 шахматиста. Это невозможно, значит, сделанное предположение неверно.

Рассмотрим произвольный турнир, пусть его призёры — шахматисты A, B и C. По доказанному выше каждый из них мог быть призёром не более, чем ещё в 2 турнирах. Так как в каждом турнире кто-то из этих шахматистов в призёры попал, дополнительно могло быть не более $3 \cdot 2 = 6$ турниров. Значит, всего турниров не больше 7.

Покажем, что в 7 турнирах шахматисты могли принять участие. Для этого достаточно указать призёров этих турниров (см. таблицу).

Номер турнира	Призёры	Номер турнира	Призёры
1	A, B, C	5	B, E, G
2	A, D, E	6	C, D, G
3	A, F, G	7	C, E, F
4	B, D, F		

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Одновременно выполнены условия критерия на 3 и на 1 балл (см. ниже)	4 балла
Доказано, что турниров не может быть больше 7; примера на 7 турниров нет	3 балла
Приведён верный пример семи турниров (указаны их призёры)	2 балла
Доказано, что ни один шахматист не мог быть призёром в 4-х турнирах	1 балл
Примеры турниров в количестве, меньшем 7 и/или доказательства, что турниров не менее 8 (или большего, чем 8 числа)	0 баллов