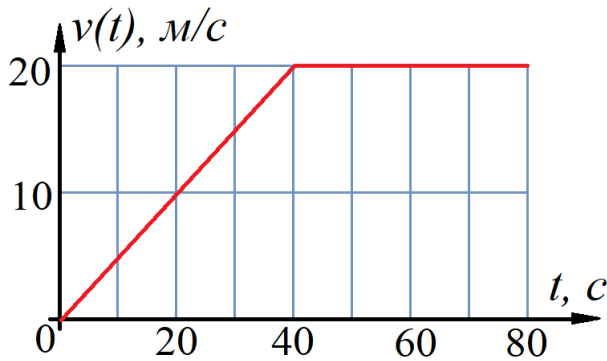


## ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

### 8.1. Средняя скорость



Зависимость скорости, с которой двигалась частица, от времени представлена на рисунке. Определите:

- путь, который прошла частица за 40 с;
- путь, который прошла частица за 80 с;
- среднюю скорость частицы за 40 с;
- среднюю скорость частицы за 80 с;
- докажите, что на участке  $0 < t < 40$  с средняя скорость в любой момент времени в два раза меньше мгновенной (текущей) скорости в этот момент времени;

- постройте качественный график зависимости средней скорости от времени  $v_{cp}(t)$ . Это означает, что на графике должны быть указаны все ключевые значения скорости и времени, понятен вид зависимости (линейная, нелинейная).

#### ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Определим путь частицы за  $t_1 = 40$  с  $S_{40}$ . Для этого посчитаем площадь под графиком (треугольник OAB)

$$S_{40} = \frac{1}{2} v_0 \cdot t_0; \quad S_{40} = \frac{1}{2} 20 \cdot 40 = 400 \text{ м.}$$

Для того, чтобы определить путь за  $t_2 = 80$  с, нужно еще учесть участок, где частица движется с постоянной скоростью

$$S_{80} = \frac{1}{2} v_0 \cdot t_0 + v_0(t - t_0);$$
$$S_{80} = 400 + 20(80 - 40) = 1200 \text{ м.}$$

Теперь можно посчитать значения средних скоростей движения в эти моменты

$$v_{40} = \frac{S_{40}}{t_1}; \quad v_{40} = \frac{400}{40} = 10 \text{ (м/с);}$$
$$v_{80} = \frac{S_{80}}{t_2}; \quad v_{80} = \frac{1200}{80} = 15 \text{ (м/с).}$$

Разберемся, какова зависимость средней скорости от времени.

На участке, где скорость линейно увеличивается ( $0 < t < t_1$ ), зависимость текущей (мгновенной) скорости от времени описывается линейной зависимостью

$$v(t) = kt, \quad k = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ (м/с}^2\text{).}$$

Установим зависимость средней скорости от времени для этого участка. Зависимость пути от времени дается выражением

$$S(t) = \frac{1}{2}kt \cdot t = \frac{kt^2}{2};$$

Тогда средняя скорость от времени зависит следующим образом

$$v_{cp}(t) = \frac{kt}{2} = \frac{v(t)}{2}.$$

Видим, что на линейном участке средняя скорость в какой-то момент времени в два раза меньше текущей скорости в этот момент времени и от времени зависит линейно.

Установим зависимость средней скорости от времени  $t_1 < t < t_2$ . Сначала найдем зависимость пути от времени

$$S(t) = \frac{1}{2}v_0t_0 + v_0(t - t_0);$$

а затем средней скорости от времени

$$v_{cp}(t) = \frac{\frac{1}{2}v_0t_0 + v_0(t - t_0)}{t} = v_0 - \frac{v_0t_0}{2t};$$

$$v_{cp}(t) = 20 - \frac{400}{t}.$$

Видим, что с течением времени на этом участке скорость будет увеличиваться не линейно (второе слагаемое с течением времени уменьшается, но перед ним стоит знак «минус», поэтому сумма увеличивается).

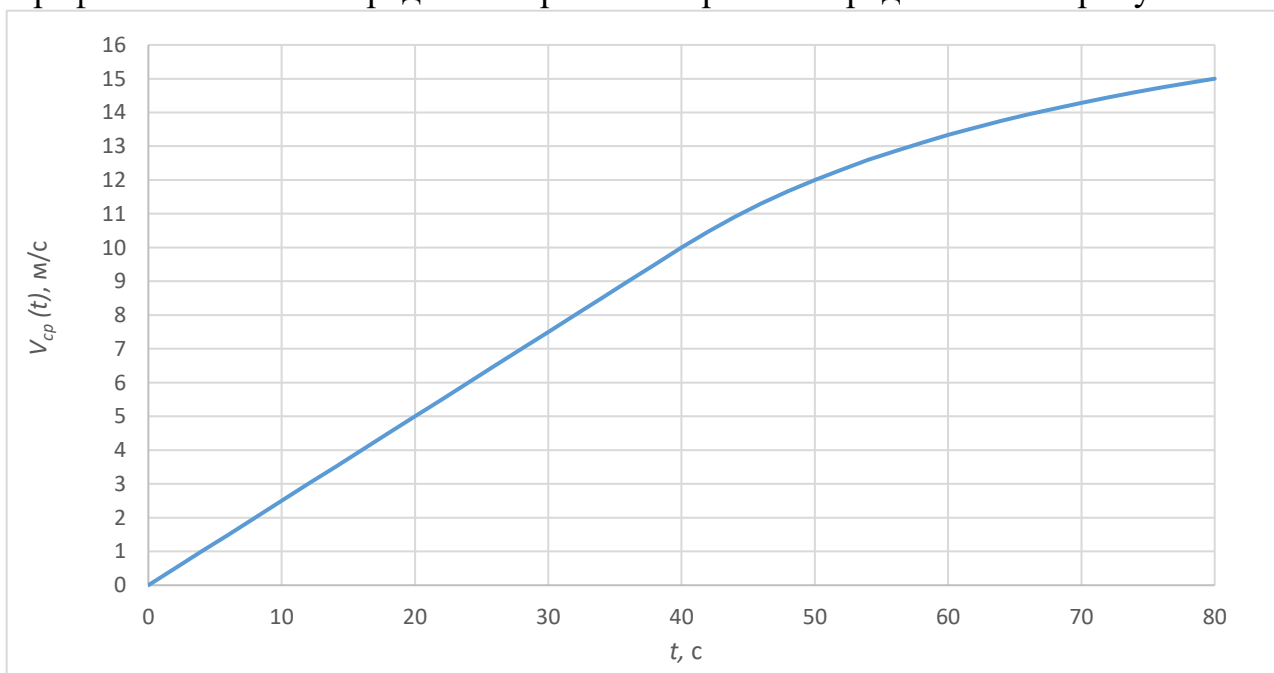
Для того, чтобы аккуратно построить график, можно посчитать значения средней скорости в различные моменты времени

$$v_{cp}(50) = 20 - \frac{400}{50} = 12 \text{ (м/с);}$$

$$v_{cp}(60) = 20 - \frac{400}{60} = 13,3 \text{ (м/с);}$$

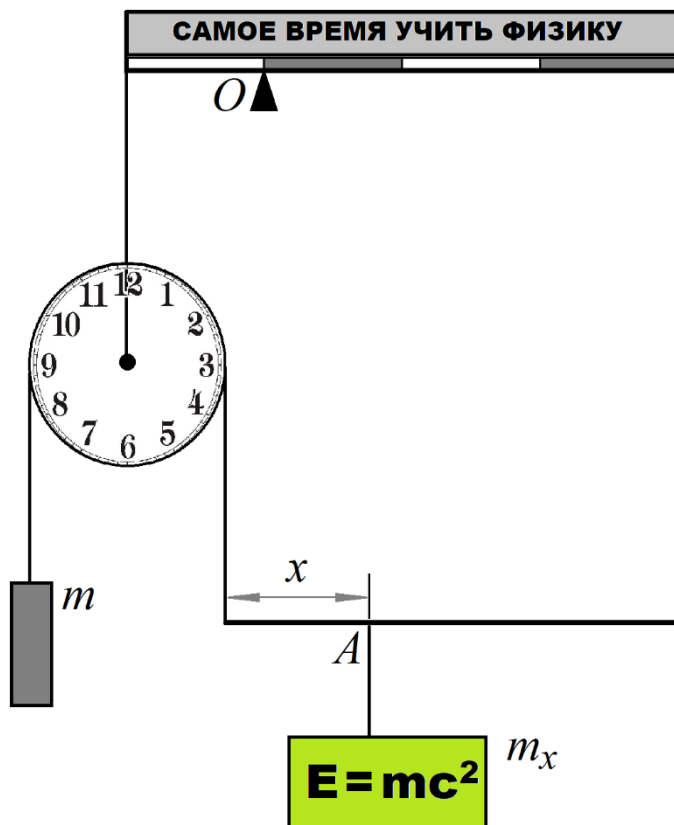
$$v_{cp}(70) = 20 - \frac{400}{70} = 14,3 \text{ (м/с).}$$

График зависимости средней скорости от времени представлен на рисунке.



## Критерии проверки

№	Содержание	Балл
1.1.	Путь частицы за первые 40 с – площадь под графиком, либо введена средняя скорость (с объяснением, почему она считается как среднее арифметическое крайних значений) $S_{40} = \frac{1}{2} v_0 \cdot t_0$	1
1.2.	Найдено числовое значение пути за первые 40 с $S_{40} = \frac{1}{2} 20 \cdot 40 = 400 \text{ м}$	1
1.3.	Найден путь, который прошла частица за 80 с $S_{80} = \frac{1}{2} v_0 \cdot t_0 + v_0(t - t_0);$ $S_{80} = 400 + 20(80 - 40) = 1200 \text{ м}$	1
1.4.	Определена средняя скорость за первые 40 с $v_{40} = \frac{S_{40}}{t_1}; \quad v_{40} = \frac{400}{40} = 10 \text{ (м/с)}$	1
1.5.	Определена средняя скорость движения за 80 с $v_{80} = \frac{S_{80}}{t_2}; \quad v_{40} = \frac{1200}{80} = 15 \text{ (м/с)}$	1
1.6.	Доказательство того, что на участке $0 < t < 40$ с средняя скорость в любой момент времени в два раза меньше мгновенной (текущей) скорости в этот момент времени <i>Записано выражение для мгновенной (текущей) скорости</i> $v(t) = kt, \quad k = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ (м/с}^2\text{)}$ <i>Записано выражение для пути</i> $S(t) = \frac{1}{2} kt \cdot t = \frac{kt^2}{2};$ <i>Определена средняя скорость</i> $v_{cp}(t) = \frac{S(t)}{t} = \frac{kt^2}{t}$ <i>Сделан вывод, что</i> $v_{cp}(t) = \frac{kt}{2} = \frac{v(t)}{2}$	До 3 Из них 0,5 1 1 0,5
1.7.	Построение качественного графика зависимости средней скорости от времени Два участка – линейный и нелинейный; Для нелинейного участка определены значения средней скорости в некоторых точках, либо получена аналитическая зависимости средней скорости от времени; На оси средней скорости указаны две ключевые скорости (в момент 40 с и 80 с) На оси времени указаны хотя бы два момента времени (40 с и 80 с)	До 2 Из них 0,5 0,5 0,5 0,5



**8.2. Арт-объект**  
 М Восьмиклассники для кабинета физики изготовили арт-объект и разместили его на опоре (точка  $O$ ) на рисунке. Точка опоры  $O$  делит верхний однородный стержень с надписью в отношении  $1 : 3$ . Масса этого стержня  $M$ . Кроме того, объект состоит из невесомых нерастяжимых нитей, гладкого блока пренебрежимо малой массы, выполненного в форме циферблата, груза массой  $m$ , прикрепленного с помощью нитки, перекинутой через блок, к очень лёгкому стержню длиной  $L$ . Второй конец этого стержня удерживается в

равновесии с помощью второй нити, верхний конец которой прикреплен к верхнему стержню. К нижнему стержню подвешен груз массой  $m_x$ , на котором можно размещать таблички с физическим формулами. Определите:

- массу груза  $m_x$ , при которой возможно равновесие;
- соотношение между массами груза  $m$  и верхнего стержня  $M$ , при котором возможно равновесие;
- отношение  $x/L$ .

### ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Расставим силы, действующие в системе и запишем условия покоя тел.

Для груза  $m$

$$T_1 = mg. \quad (1)$$

Записав условие покоя подвижного блока пренебрежимо малой массы, получим, что сила натяжения левой верхней нити равна

$$2T_1.$$

Условие покоя груза  $m_x$ :

$$T = m_x g. \quad (2)$$

Правило моментов для верхнего стержня относительно т.О

$$2T_1 \cdot a = Mg \cdot a + T_2 \cdot 3a. \quad (3)$$

Условие покоя нижнего стержня

$$T_1 + T_2 = m_x g. \quad (4)$$

Правило моментов для нижнего стержня относительно точки А

$$T_1 \cdot x = T_2 \cdot (L - x). \quad (5)$$

Из уравнения (4) выразим  $T_2$

$$T_2 = m_x g - T_1.$$

Полученное выражение и уравнение (1) подставим в (3), поделим на  $a$ , получим

$$2mg = Mg + 3(m_x g - mg).$$

Выразим из этого уравнения  $m_x$

$$m_x = \frac{5}{3}m - \frac{M}{3}.$$

Так как масса  $m_x$  должна быть положительна, то равновесие арт-объекта возможно, если

$$5m > M.$$

Найдем отношение  $x/L$ . Из уравнений (4) и (1) получим значение  $T_2$

$$\begin{aligned} T_2 &= m_x g - mg \\ &= \left(\frac{5}{3}m - \frac{M}{3}\right)g - mg \\ &= \frac{2}{3}mg - \frac{M}{3}g. \end{aligned}$$

Подставим (1) и полученное уравнение в (5)

$$mg \cdot x = \left(\frac{2}{3}mg - \frac{M}{3}g\right) \cdot (L - x).$$

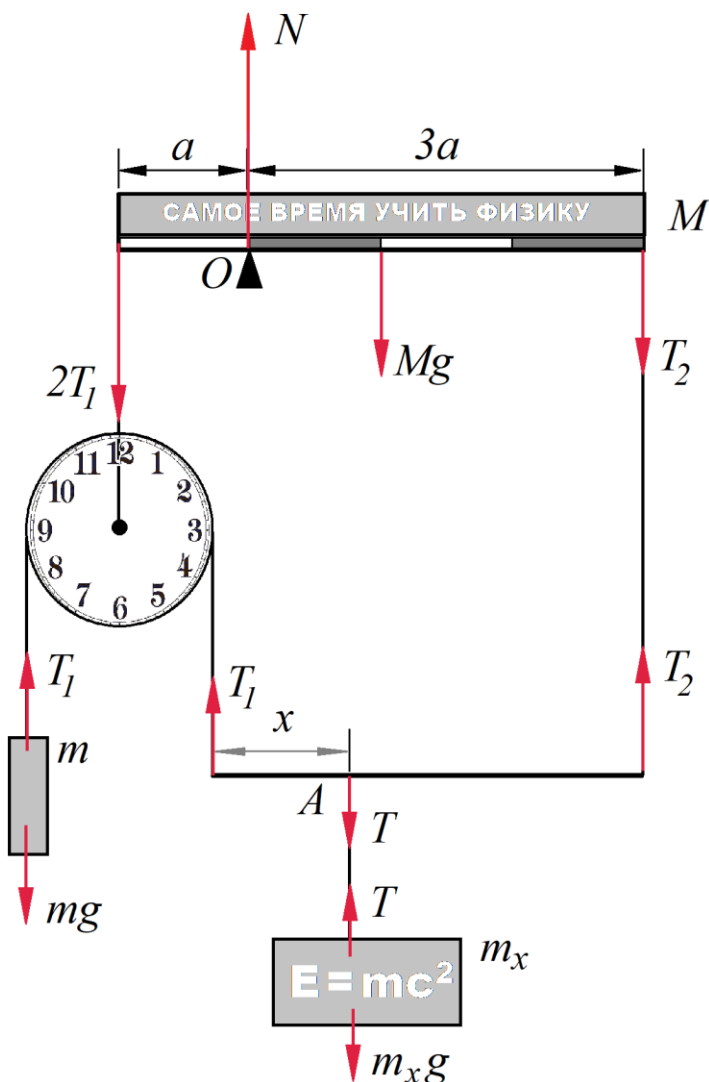
Выразим нужно отношение

$$\frac{x}{L} = \frac{2m - M}{5m - M}.$$

Так  $2m - M < 5m - M$ , то полученное выражение меньше 1. Так и должно быть, так как  $x < L$ .

### Критерии проверки

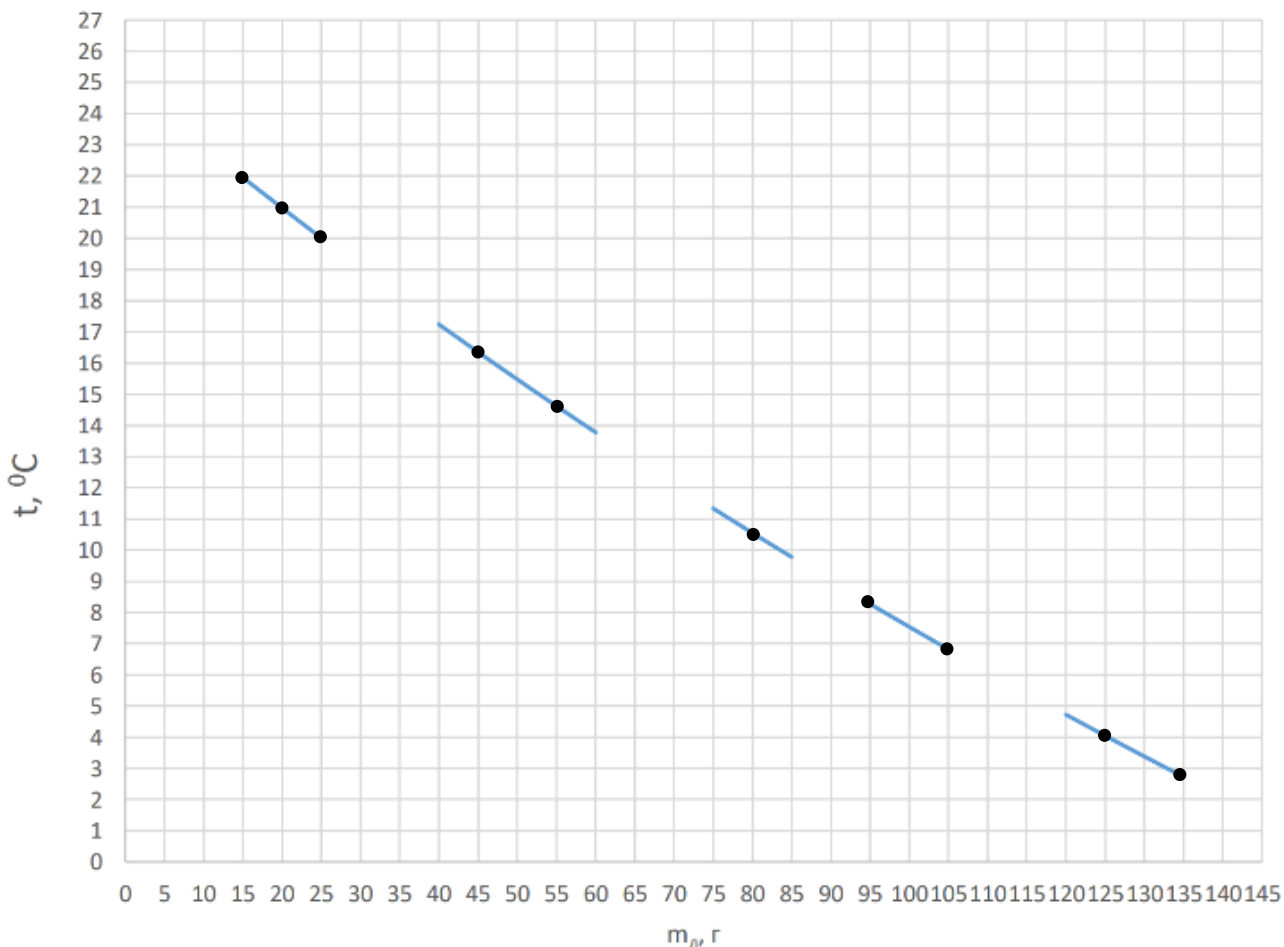
№	Содержание	Балл
2.1.	Сделан рисунок, расставлены силы, действующие на тела	1
2.2.	Условие покоя тела $m$ $T_1 = mg$	0,5
2.3.	Для подвижного блока: сила натяжения верхней левой нити $2T_1$	0,5
2.4.	Условие покоя груза $m_x$ : $T = m_x g$	0,5
2.5.	Правило моментов для верхнего стержня относительно т.О (либо другой) $2T_1 \cdot a = Mg \cdot a + T_2 \cdot 3a$	1
2.6.	Для нижнего стержня: Условие покоя по вертикали:	



	$T_1 + T_2 = m_x g$ Правило моментов для нижнего стержня относительно точки А (либо другой)	1
	$T_1 \cdot x = T_2 \cdot (L - x)$ Либо может быть дважды записано правило моментов относительно разных точек (по 1 баллу за каждое)	1
2.7.	Найдена масса $m_x$ $m_x = \frac{5}{3}m - \frac{M}{3}$	1,5
2.8.	Записано условие на массы $5m > M$	1
2.9.	Найдено отношение $x/L$ $\frac{x}{L} = \frac{2m - M}{5m - M}$	2

### 8.3. Лёд и вода

Восьмиклассники проводили опыты с водой и льдом. В воду массой  $m_в$ , находящуюся в калориметре, они опускали кусочки льда. Температура кусочков льда всегда была равной  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , а начальная температура воды во всех опытах была одинакова. Дождавшись установления теплового равновесия, они записывали показания термометра, помещенного в калориметр. Потом они построили график зависимости температуры теплового равновесия от массы льда  $m_л$ . Но, к сожалению, содержимое калориметра пролилось на график, поэтому сохранились лишь его фрагменты, которые представлены на рисунке.



Проанализировав информацию, которую можно получить из графика, определите:

- начальную температуру воды  $t_в$ ;
- массу воды  $m_в$ ;
- какую массу льда, нужно опустить в калориметр, чтобы температура оказалась равной  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ .

Удельная теплоёмкость воды равна  $c_в = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$ , удельная теплота плавления льда равна  $L = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$ .

**ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:**

**ВАРИАНТ 1.**

По графику определяем, что при массе льда  $m_1 = 20$  г температура содержимого калориметра равна  $t_1 = 21^\circ\text{C}$ , а при массе льда  $m_2 = 125$  г температура содержимого калориметра равна  $t_2 = 4^\circ\text{C}$ .

Также по графику видим, что хорошими точками (у которых наиболее точно определяются координаты) являются также точки  $m_3 = 15$  г и  $t_3 = 22^\circ\text{C}$ ,  $m_4 = 25$  г и  $t_4 = 20^\circ\text{C}$ . Для решения задачи можно использовать любую пару из перечисленных.

Запишем уравнения теплового баланса для этих случаев

$$c_B m_B (t_1 - t_B) + m_1 L + m_1 c_B (t_1 - t_0) = 0;$$

$$c_B m_B (t_2 - t_B) + m_2 L + m_2 c_B (t_2 - t_0) = 0.$$

Из записанных уравнений с учётом того, что  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , выразим массу воды  $m_B$  и начальную температуру воды  $t_B$

$$m_B = \frac{(m_2 - m_1)L + c_B(m_2 t_2 - m_1 t_1)}{c_B(t_1 - t_2)};$$

$$t_B = t_1 + \frac{m_1 L + m_1 c_B t_1}{c_B m_B}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$m_B = 0,5 \text{ кг};$$

$$t_B = 25^\circ\text{C}.$$

Определим какую массу льда, нужно опустить в калориметр, чтобы температура оказалась равной  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Запишем уравнение теплового баланса в предположении, что льда взяли столько, что он весь растаял, а вода при этом охладилась до  $t_0 = 0^\circ\text{C}$

$$c_B m_B (t_0 - t_B) + m_{min} L = 0.$$

Заметим, что таким образом мы определяем минимальную массу льда. Выразим массу льда из записанного уравнения

$$m_{min} = \frac{c_B m_B t_B}{L}; \quad m_{min} = 0,157 \text{ кг}.$$

Тогда для того, чтобы температура в калориметре после установления теплового равновесия установилась равной  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , нужно чтобы масса льда была бы не менее 157 г.

## **ВАРИАНТ 2. (проведение прямой линии по графику)**

Следует отметить, что данный вариант не является правильным, но в случае малой массы льда позволяет сделать оценку начальной температуры воды и её массы.

Вначале обсудим, можно ли в данной ситуации проводить прямую линию по сохранившимся точкам и участкам графика.

Во-первых, график не является линейным и провести прямую линию, чтобы все участки графика её пересекали мы не можем. На рисунке ниже приведено несколько таких попыток. Видим, что все прямые проведены неудачно.

Во-вторых, зависимость температуры теплового равновесия от массы льда не является линейной. Выразим из уравнения теплового баланса температуру в калориметре  $t$  после таяния всего льда массой  $m_L$

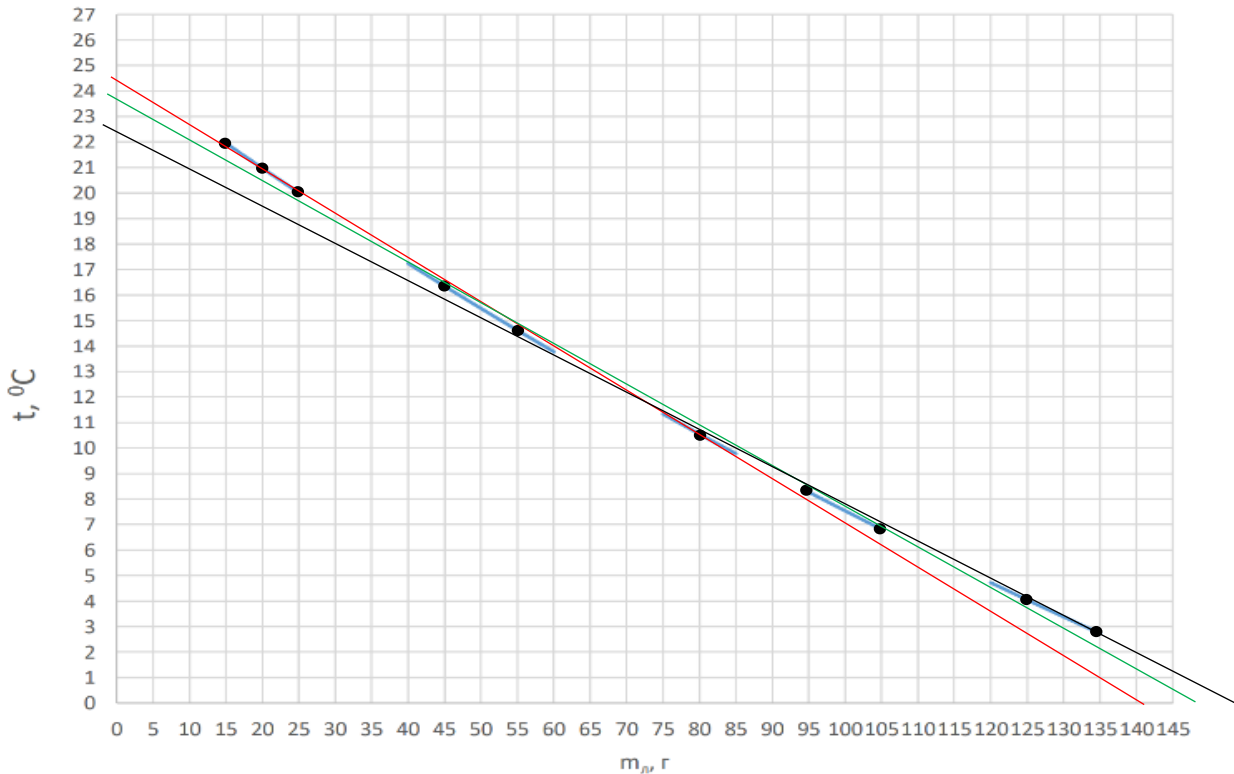
$$c_B m_B (t - t_B) + m_L L + m_L c_B (t - t_0) = 0;$$



$$t = \frac{c_B m_B t_B}{c_B (m_B + m_L)} - \frac{L}{c_B (m_B + m_L)} m_L.$$

Разберёмся, может ли данная зависимость при каких-то параметрах быть линейной? Для этого вынесем за скобки в знаменателях массу воды

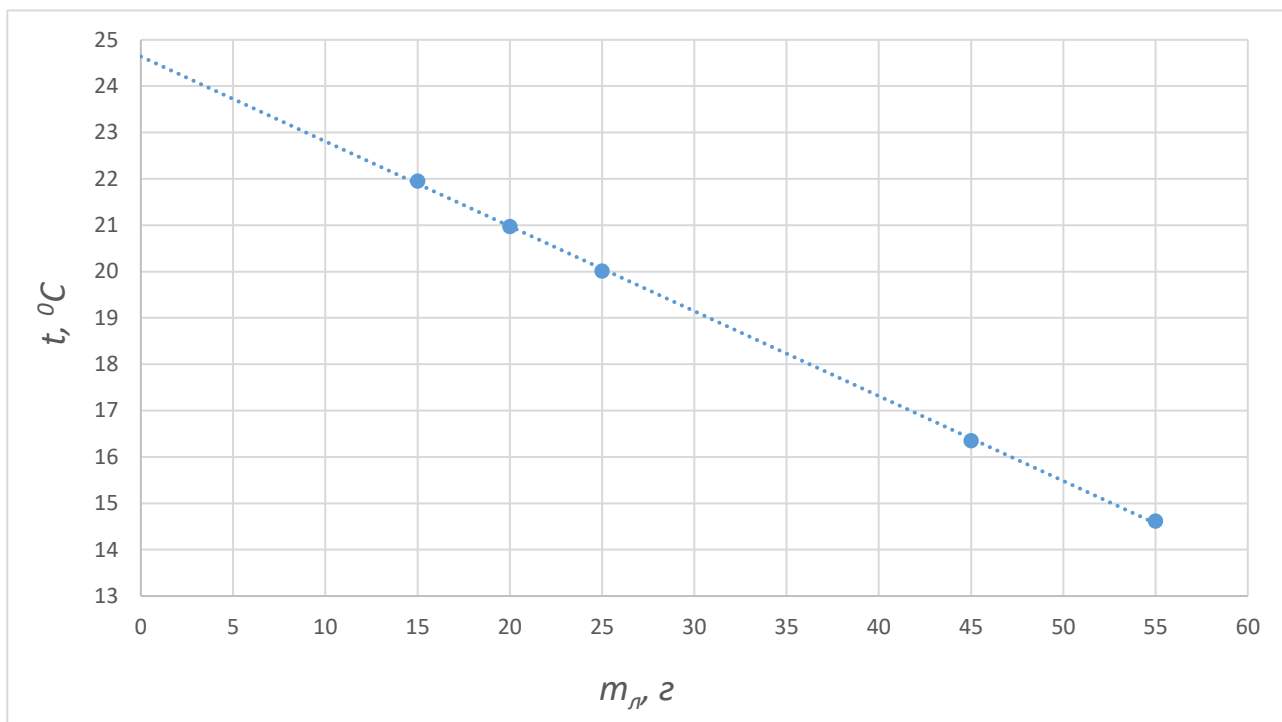
$$t = \frac{c_B m_B t_B}{c_B m_B (1 + \frac{m_L}{m_B})} - \frac{L}{c_B m_B (1 + \frac{m_L}{m_B})} m_L.$$



Если масса льда  $m_L \ll m_B$ , в знаменателях отношением  $m_L/m_B$  можно пренебречь. Тогда получим

$$t = t_B - \frac{L}{c_B m_B} m_L.$$

Это означает, что зависимость температуры теплового равновесия от массы линейна только в случае если масса воды намного превышает массу льда. Это означает, что только при малых массах льда попытка проведения прямой линии по существующим точкам может привести к результату близкому к правильному. На самом деле, если мы берем только первые пять точек (масса льда до 50 грамм, отношение  $m_L/m_B < 0,1$ ), то можно определить начальную температуру воды. На рисунке выше приведен график, построенный по первым пяти точкам, начальная температура воды, определяемая таким образом, равна  $24,6^\circ\text{C}$ .



По построенному графику можно определить угловой коэффициент наклона  $k$

$$k = \frac{\Delta t}{\Delta m_{\text{л}}}; k = \frac{14,7 - 24,6}{0,055} = -180 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{кг}}$$

Так как угловой коэффициент наклона равен

$$k = -\frac{L}{c_{\text{в}} m_{\text{в}}},$$

то можно определить массу воды в калориметре

$$m_{\text{в}} = -\frac{L}{c_{\text{в}} k}; m_{\text{в}} = -\frac{3,35 \cdot 10^5}{4,2 \cdot 10^3 \cdot (-180)} = 0,443 \text{ кг.}$$

Определять массу льда, которую нужно опустить в калориметр, чтобы температура оказалась равной  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ , таким образом нельзя, так как отношение  $m_{\text{л}}/m_{\text{в}}$  становится таким, что использовать линейную зависимость нельзя. Если по прямой, построенной по первым пяти точкам, определить массу льда, то она окажется равной

$$m_{\text{л}} = \frac{24,6}{0,18} = 137 \text{ (г)},$$

что существенно отличается от правильного значения.

### Критерии проверки:

Для двух вариантов решения задачи разработаны единые критерии. Для варианта 2 содержание критерия написано курсивом.

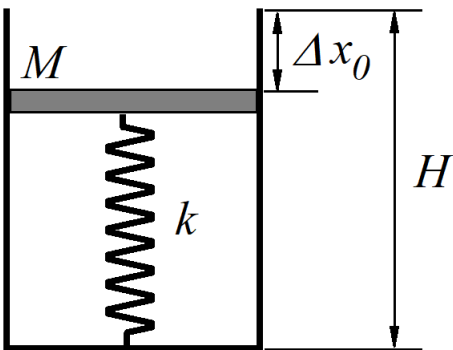
Важно: вариант решения 1 оценивается максимальным баллом 10. Вариант 2 (проведение прямой линии) не может быть оценен максимальным баллом, так как не позволяет определить массу льда, которую нужно опустить в калориметр, чтобы температура оказалась равной  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ , этот метод не является точным, позволяет сделать только приближенные оценки для массы воды и ее начальной



	$t_B = t_1 + \frac{m_1 L + m_1 c_B t_1}{c_B m_B}$ <p><i>Вариант 2</i> Начальная температура воды определяется по графику путем его продолжения до пересечения с осью температуры</p>	1
3.7.	<p>Вариант 1 Числовой ответ для начальной температуры воды <math>t_B = 25^{\circ}\text{C}</math> Правильным считается значение от 24,6 до 25,4 <math>^{\circ}\text{C}</math></p> <p><i>Вариант 2</i> Числовое значение начальной температуры воды от 24,6 до 25,4 <math>^{\circ}\text{C}</math></p>	0,5          0,5
3.8.	<p>Вариант 1 (оценивается только для решения таким способом) Для определения минимальной массы льда, необходимой для равновесной температуры <math>t_0 = 0^{\circ}\text{C}</math> записано уравнение теплового баланса</p> $c_B m_B (t_0 - t_B) + m_{min} L = 0$	1
3.9.	<p>Вариант 1 (оценивается только для решения таким способом) Найдена минимальная масса льда (для установления <math>0^{\circ}\text{C}</math>)</p> $m_{min} = \frac{c_B m_B t_B}{L}; \quad m_{min} = 0,157 \text{ кг.}$ <p>Правильным считаются значения в диапазоне от 155 г до 160 г</p>	1
3.10.	<p>Вариант 1 (оценивается только для решения таким способом) Записан ответ «чтобы температура в калориметре после установления теплового равновесия установилась равной <math>t_0 = 0^{\circ}\text{C}</math>, нужно чтобы масса льда была бы <b>не менее</b> .... г»</p>	1
<p><b>ПРИМЕЧАНИЕ: п.3.8, 3.9 и 3.10 оцениваются только при решении задачи способом, описанным в варианте 1</b></p>		

### 8.4. Долив-перелив

К дну цилиндрического сосуда прикреплена пружина с коэффициентом упругости  $k$ , длина пружины в недеформированном состоянии равна высоте сосуда  $H$ . На пружину помещают поршень массой  $M$ , который может без трения скользить по стенкам сосуда, в результате чего поршень располагается на некотором расстоянии  $\Delta x_0$  от верхнего края стенок сосуда. На поршень сверху начинают наливать жидкость плотностью  $\rho$  с массовым расходом  $\mu$ .



Определите:

- величину  $\Delta x_0$ ;
- величину  $\Delta x$ , на которую ещё опустится поршень

через промежуток времени  $\Delta t$  после начала поступления жидкости;

- через какое время  $T$  жидкость начнёт выливаться из сосуда;
- при каких условиях жидкость начнёт выливаться из сосуда?

Вода между стенками сосуда и поршнем не проникает. Площадь поперечного сечения сосуда равна  $S$ .

*Примечание: массовым расходом называется масса воды, поступающая в сосуд за единицу времени, например, за 1 секунду.*

#### ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Для того, чтобы определить величину начальной деформации пружины  $\Delta x_0$  (расстояние, на котором располагается, отсчитываемое от верхнего края стенок сосуда), запишем условие покоя поршня

$$Mg = k \cdot \Delta x_0;$$
$$\Delta x_0 = \frac{Mg}{k}.$$

Спустя промежуток времени  $\Delta t$  после начала поступления жидкости в сосуд поступит масса  $\mu \Delta t$  и в сосуде окажется слой жидкости высотой

$$\Delta h = \frac{\mu}{\rho S} \Delta t.$$

Определим новую величину деформации пружины

$$Mg + \mu g \cdot \Delta t = k \cdot (\Delta x_0 + \Delta x);$$
$$\mu g \cdot \Delta t = k \cdot \Delta x;$$
$$\Delta x = \frac{\mu g}{k} \cdot \Delta t.$$

Это означает, что поршень опустится на  $\Delta x$ .

Таким образом, за промежуток времени  $\Delta t$  в сосуде уровень жидкости должен подняться на  $\Delta h$ , если бы поршень был неподвижен, но так как поршень при этом опустился на  $\Delta x$ , то уровень жидкости поднялся на  $\Delta y$

$$\Delta y = \Delta h - \Delta x = \frac{\mu}{\rho S} \Delta t - \frac{\mu g}{k} \cdot \Delta t = \mu \cdot \Delta t \cdot \left( \frac{1}{\rho S} - \frac{g}{k} \right).$$

Скорость подъёма уровня жидкости будет равна

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \mu \cdot \left( \frac{1}{\rho S} - \frac{g}{k} \right).$$

Подъём уровня жидкости будет возможен, если выражение в скобках будет положительным

$$\left(\frac{1}{\rho S} - \frac{g}{k}\right) > 0;$$

$$k > \rho g S.$$

Для того, чтобы жидкость начала выливаться из стакана, должен пройти промежуток времени  $T$

$$T = \frac{\Delta x_0}{v};$$

$$T = \frac{\frac{Mg}{k}}{\mu \cdot \left(\frac{1}{\rho S} - \frac{g}{k}\right)} = \frac{Mg\rho S}{\mu(k - \rho g S)}.$$

### Критерии проверки

№	Содержание	Балл
4.1.	Определение начальной деформации пружины: Записано условие покоя поршня $Mg = k \cdot \Delta x_0$ . Найдено $\Delta x_0 = \frac{Mg}{k}$	До 1 Из них 0,5  0,5
4.2.	Записано выражение $\Delta h = \frac{\mu}{\rho S} \Delta t$	1
4.3	Записано новое условие покоя поршня $Mg + \mu g \cdot \Delta t = k \cdot (\Delta x_0 + \Delta x)$	1
4.4.	Получена новая величина деформации пружины $\Delta x = \frac{\mu g}{k} \cdot \Delta t$	1
4.5.	Записано выражение для скорости подъёма уровня жидкости $\Delta y = \Delta h - \Delta x = \frac{\mu}{\rho S} \Delta t - \frac{\mu g}{k} \cdot \Delta t = \mu \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{1}{\rho S} - \frac{g}{k}\right)$	2
4.6.	Найдена скорость подъёма уровня жидкости $v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \mu \cdot \left(\frac{1}{\rho S} - \frac{g}{k}\right)$	1
4.7.	Указано, что подъём уровня жидкости будет возможен, если $\left(\frac{1}{\rho S} - \frac{g}{k}\right) > 0; k > \rho g S.$	1
4.8.	Найдено промежуток времени, спустя который жидкость начнет переливаться через край стакана $T = \frac{\Delta x_0}{v}; T = \frac{Mg\rho S}{\mu(k - \rho g S)}.$	2