

ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

7.1. Дорога в деревню

Дорога от дома до деревни, в которой живет бабушка с дедушкой, занимает время $T = 1$ час 15 минут. Семиклассник заметил, что движение машины состояло из трех равных по времени участков с разной скоростью. Сначала машина ехала по асфальтированной дороге со скоростью v_1 , затем более медленно по грунтовой дороге со скоростью v_2 , затем по лесной дороге машина двигалась очень медленно со скоростью v_3 . Участок грунтовой дороги имеет протяженность $L_2 = 20$ км. Скорость движения по лесной дороге в $k = 4$ раза меньше скорости движения по асфальтированной дороге. Средняя скорость движения от дома до деревни оказалась равной $v_{cp} = 40$ км/ч. Определите:

- скорости движения v_1 , v_2 и v_3 ;
- расстояние от дома до деревни.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Определим расстояние от дома до деревни

$$L = v_{cp} \cdot T; \quad L = 40 \cdot 1,25 = 50 \text{ (км)}.$$

Выразим расстояние L от дома до деревни через скорости движения на участках

$$L = v_1 \cdot \frac{T}{3} + v_2 \cdot \frac{T}{3} + v_3 \cdot \frac{T}{3}. \quad (1)$$

Выразим путь L через среднюю скорость v_{cp}

$$L = v_{cp} T. \quad (2)$$

Кроме того, по условию задачи

$$v_2 \cdot \frac{T}{3} = L_2. \quad (3)$$

Найдем скорость v_2

$$v_2 = \frac{3L_2}{T}; \quad v_2 = \frac{3 \cdot 20}{1,25} = 48 \text{ (км/ч)}.$$

С учетом того, что

$$v_3 = \frac{v_1}{4}$$

Выражение (1) объединим с (2) и запишем

$$v_1 \cdot \frac{T}{3} + v_2 \cdot \frac{T}{3} + \frac{v_1}{4} \cdot \frac{T}{3} = v_{cp} T$$

$$\frac{5}{4} \cdot v_1 + v_2 = 3v_{cp}.$$

Теперь можно определить v_1

$$v_1 = \frac{4}{5} \cdot (3v_{cp} - v_2);$$

$$v_1 = \frac{4}{5} \cdot (3 \cdot 40 - 48) = 57,6 \text{ (км/ч)}.$$

Скорость движения на лесной дороге равна

$$v_3 = \frac{v_1}{4}; \quad v_3 = \frac{57,6}{4} = 14,4 \text{ (км/ч)}.$$

Критерии проверки

№	Содержание	Балл
1.1.	Записано $L = v_{cp} \cdot T$	0,5
1.2.	Найдено расстояние от дома до деревни ($L = 50$ км)	1
1.3.	Записано $L = v_1 \cdot \frac{T}{3} + v_2 \cdot \frac{T}{3} + v_3 \cdot \frac{T}{3}$	2
1.4.	Записано $v_2 \cdot \frac{T}{3} = L_2$	0,5
1.5.	Найдена $v_2 = \frac{3L_2}{T};$	0,5
1.6.	Получен числовой ответ $v_2 = \frac{3 \cdot 20}{1,25} = 48 \text{ (км/ч)}$	1
1.7.	Получено выражение для $v_1 = \frac{4}{5} \cdot (3v_{cp} - v_2)$	2
1.8.	Найдено числовое значение $v_1 = \frac{4}{5} \cdot (3 \cdot 40 - 48) = 57,6 \text{ (км/ч)}$	1
1.9.	Записано выражение для скорости движения по лесной дороге $v_3 = \frac{v_1}{4}$	0,5
1.10.	Найдено числовое значение $v_3 = \frac{57,6}{4} = 14,4 \text{ (км/ч)}$	1

Примечание:

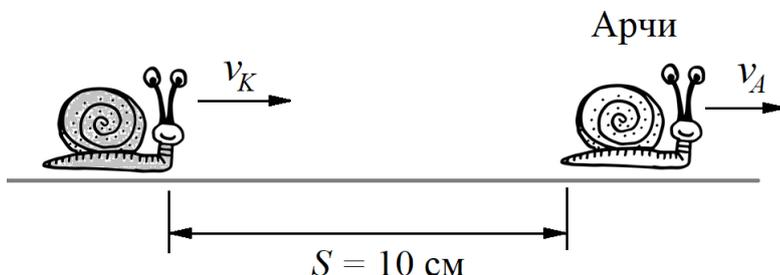
Участник может решать задачу не в общем виде. В этом случае следует проверять расчёты и числовые значения. Если все ответы верны, то выставляется полный балл. Если какой-то ответ не верен, то снимается балл за него.

7.2. Гонки улиток

В 1995 году участница гонок виноградных улиток Арчи установила мировой рекорд, преодолев дистанцию в 33 см за 140 секунд. На соревнованиях по бегу улиток в одной из китайских провинций китайский сородич Арчи расстояние в 1 чунь пополз за 0,4 цзы. Определите:

- скорости движения Арчи v_A и улитки из Китая v_K в км/ч;

- если этих двух улиток разместить на одной гоночной трассе, таким образом, как показано на рисунке, то как скоро они встретятся? На каком расстоянии от места старта Арчи произойдет встреча?



Известно, что 1 чунь составляет $33\frac{1}{3}$ см, а 1 цзы – 5 минут.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Определим скорость Арчи

$$v_A = \frac{33}{140} \text{ см/с} = 0,24 \text{ см/с} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ км/ч.}$$

Определим скорость улитки из Китая

$$v_K = 2,5 \text{ чунь/цзы} = \frac{2,5 \cdot 33\frac{1}{3}}{5} \text{ см/мин} = 0,28 \frac{\text{см}}{\text{с}} \\ = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 10,1 \cdot 10^{-3} \text{ км/ч.}$$

Определим за какое время улитка из Китая догонит Арчи. За то время t , пока Арчи «пробежит» расстояние

$$v_A t$$

«китайскому» ползуну нужно преодолеть большее расстояние, равное

$$L + v_A t.$$

Поэтому

$$L + v_A t = v_K t.$$

Определим t

$$t = \frac{L}{v_K - v_A}; \quad t = \frac{10 \text{ см}}{(0,28 - 0,24) \frac{\text{см}}{\text{с}}} = 250 \text{ (с)}.$$

Расстояние от места старта Арчи до точки, в которой его догонит улитка из Китая, равно

$$S = v_A t; \quad S = 0,24 \cdot 250 = 60 \text{ (см)}.$$

Критерии проверки

№	Содержание	Балл
2.1.	Определена скорость Арчи $v_A = \frac{33}{140} \text{ см/с} = 0,24 \text{ см/с} = 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ км/ч.}$	1
2.2.	Определена скорость улитки из Китая	3

	$v_K = 2,5 \text{ чунь/цзы} = \frac{2,5 \cdot 33 \frac{1}{3}}{5} \text{ см/мин} = 0,28 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ $= 10,1 \cdot 10^{-3} \text{ км/ч.}$	
2.3	Записано выражение $L + v_A t = v_K t$	2
2.4.	Получено выражение $t = \frac{L}{v_K - v_A}$	1
2.5.	Получен числовой ответ $t = \frac{10 \text{ см}}{(0,28 - 0,24) \frac{\text{см}}{\text{с}}} = 250 \text{ (с)}$	1
2.6.	Для расстояние от места старта Арчи до места встречи записано $S = v_A t$	1
2.7.	Получен числовой ответ $S = 0,24 \cdot 250 = 60 \text{ (см)}$	1

Примечание:

Участник может решать задачу не в общем виде. В этом случае следует проверять расчёты и числовые значения. Если все ответы верны, то выставляется полный балл. Если какой-то ответ не верен, то снимается балл за него.

7.3.Тренировка с фонарями

Тренировка гребцов – байдарочников происходит в прямом канале с небольшим течением. На берегу канала на одинаковом расстоянии друг от друга установлены фонари освещения. Спортсмен на байдарке в течении какого-то неизвестного времени τ двигался в одном направлении, при этом он насчитал $N_1 = 29$ фонарей, затем развернулся и возвращаясь столько же времени, насчитал $N_2 = 21$ фонарь. Тренер при этом просто сидит на резиновой лодке и движется по течению реки, не прикладывая никаких усилий. Обозначим скорость течения воды в канале u , скорость байдарки относительно воды (собственную скорость байдарки) v . Определите:

- отношение v/u ;
- сколько фонарей насчитает тренер за время τ .

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Обозначим расстояние между фонарями l_0 .

Пока спортсмен плывет по течению, он насчитает $N_1 = 29$ фонарей, его скорость движения относительно берега равна $v + u$

$$(v + u)\tau = N_1 l_0. \quad (1)$$

При обратном движении в течение того же времени он насчитает $N_2 = 21$ фонарь, его скорость движения относительно берега равна $v - u$

$$(v - u)\tau = N_2 l_0. \quad (2)$$

Из записанных выражений определяем отношение v/u

$$\frac{v}{u} = \frac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2}; \quad \frac{v}{u} = \frac{29 + 21}{29 - 21} = \frac{50}{8} = 6,25.$$

Определим, сколько фонарей за время τ насчитает тренер. Так как он движется со скоростью, равной скорости течения, то

$$u\tau = N l_0. \quad (3)$$

Поделим (3) на (1), получим

$$\frac{N}{N_1} = \frac{u}{v + u}.$$

Выразим N

$$N = N_1 \frac{u}{v + u}; \quad N = 29 \cdot \frac{u}{u + 6,25u} = \frac{29}{7,25} = 4.$$

Критерии проверки

№	Содержание	Балл
3.1.	Введено обозначение для расстояния между фонарями	0,5
3.2.	Для движения по течению записано, что скорость относительно берега равна $v + u$	0,5
3.3	Записано выражение $(v + u)\tau = N_1 l_0$	2
3.4.	Для движения по течению записано, что скорость относительно берега равна $v - u$	0,5
3.5.	Записано выражение $(v - u)\tau = N_2 l_0$	1

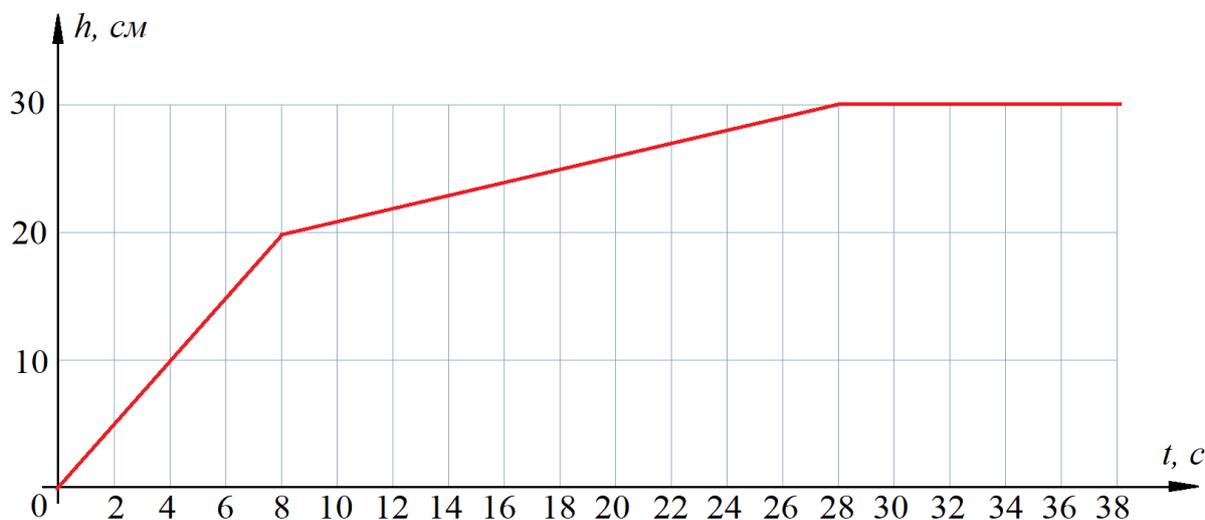
3.6.	Найдено отношение скоростей в общем виде (либо одна скорость выражена через другую) $\frac{v}{u} = \frac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2}$	1,5
3.7.	Найдено числовое значение отношения скоростей $\frac{v}{u} = \frac{29 + 21}{29 - 21} = \frac{50}{8} = 6,25$	1
3.8.	Записано $u\tau = Nl_0$	1
3.9.	Найдено либо $N = N_1 \frac{u}{v + u}$ $N = N_2 \frac{u}{v - u}$	1
3.10.	Найдено числовое значение $N = 4$	1

Примечание:

Участник может решать задачу не в общем виде. В этом случае следует проверять расчёты и числовые значения. Если все ответы верны, то выставляется полный балл. Если какой-то ответ не верен, то снимается балл за него.

7.4. Заполнение водой

В цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения S_0 поступает вода с массовым расходом $\mu = 10$ г/с. В сосуде на дне плотно стоит тело в форме прямоугольного параллелепипеда. На рисунке представлен график зависимости



уровня жидкости h в сосуде от времени t . Определите:

- какой объем воды поступает в сосуд за 1 секунду;
- высоту стакана H_0 ;
- высоту тела H ;
- площадь поперечного сечения сосуда S_0 ;
- площадь поперечного сечения тела S .

Примечание: объем цилиндра равен произведению площади поперечного сечения на высоту. Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м³.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

На графике видим две точки излома: в момент времени $t_1 = 8$ с при высоте уровня воды 20 см и в момент времени $t_2 = 28$ с при высоте уровня воды 30 см. Следовательно, высота сосуда равна $H_0 = 30$ см, а высота тела $H = 20$ см.

В единицу времени (за 1 секунду) в сосуд поступает объем воды v , равный

$$v = \frac{\mu}{\rho}; \quad v = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1000} = 10^{-5} \text{ (м}^3/\text{с)} = 10 \text{ (см}^3/\text{с)}.$$

Понятно, что первые 8 секунд заполняется нижняя часть сосуда, часть объема которой занимает тело, стоящее на дне, поэтому заполнение идет быстрее. А с 8ой секунды по 28ую секунду заполняется верхняя часть объема сосуда, высота которой равна 10 см.

За 20 секунд в сосуд поступает объем воды, равный

$$V_2 = v \cdot t_2; \quad V_2 = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см}^3.$$

Так как высота этой части сосуда равна $h_2 = 10$ см, то площадь поперечного сечения сосуда равна

$$S_0 = \frac{V_2}{h_2}; \quad S_0 = \frac{200}{10} = 20 \text{ см}^2.$$

За первые 8 секунд в сосуд поступит объем воды, равный

$$V_1 = v \cdot t_1; \quad V_1 = 10 \cdot 8 = 80 \text{ см}^3.$$

Так как объем нижней части сосуда высотой $H = 20$ см равен

$$V_{\text{ниж}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ см}^3.$$

Из них $V_1 = 80 \text{ см}^3$ занимает вода, следовательно, объем тела равен

$$V = V_{\text{ниж}} - V_1; V_0 = 400 - 80 = 320 \text{ см}^3.$$

Так как высота тела равна $H = 20$ см, то площадь поперечного сечения равна

$$S = \frac{V}{H}; S = \frac{320}{20} = 16 \text{ см}^2.$$

Критерии проверки

№	Содержание	Балл
4.1.	Отмечено, что вторая точка излома графика соответствует началу выливания жидкости из стакана	0,5
4.2.	По второй точке излома графика найдена высота сосуда равна $H_0 = 30$ см	0,5
4.3.	Отмечено, что первая точка излома означает, что уровень жидкости совпадает с высотой тела	0,5
4.4.	По первой точке излома найдена высота тела $H = 20$ см	0,5
4.5.	Записано выражение для объёмного расхода $v = \frac{\mu}{\rho}$	0,5
4.6.	Найдено числовое значение объёмного расхода $v = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1000} = 10^{-5} \text{ (м}^3/\text{с)} = 10 \text{ (см}^3/\text{с)}$	1
4.7.	Указано, что от 8 до 20 с что заполняется верхняя часть сосуда без тела	0,5
4.8.	Определено, что за 20 секунд в сосуд поступает объём воды, равный $V_2 = v \cdot t_2; V_2 = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см}^3$	1
4.9.	Определена площадь поперечного сечения сосуда $S_0 = \frac{V_2}{h_2}; S_0 = \frac{200}{10} = 20 \text{ см}^2$	1
4.10.	Определено, что за 8 секунд в сосуд поступает объём воды, равный $V_1 = v \cdot t_1; V_1 = 10 \cdot 8 = 80 \text{ см}^3$	1
4.11.	Посчитан объём нижней части сосуда $V_{\text{ниж}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ см}^3$	1
4.12.	Определен объем тела $V = V_{\text{ниж}} - V_1; V_0 = 400 - 80 = 320 \text{ см}^3$	1
4.13.	Найдена площадь поперечного сечения тела $S = \frac{V}{H}; S = \frac{320}{20} = 16 \text{ см}^2$	1