***Задача №1. Мальчик-прогульщик.*** Мальчик решил прогулять урок и для быстроты поехал по очень длинным перилам, которые расположены под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Скатываясь с постоянной скоростью $v = 5$ м/с, он подбросил мячик вверх со скоростью относительно себя $v_0 = 50$ см/с так, чтобы его поймать. На каком расстоянии мальчик поймает мячик обратно? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/$c^2$.

***Решение.*** Задачу можно легко решить с помощью переход в систему отсчёта (СО) , движущуюся вместе с мальчиком. В СО мальчика $x'0'y'$ мячик будет двигаться с ускорением свободного падения $g$, вектор начальной скорости мячика $\vec{v}_0$ направлен вертикально вверх (чтобы мальчик смог поймать его), траектория мячика — прямая, время подъёма равно времени падения:

$$t_{\text{под}} = t_{\text{пад}}. \tag{1}$$

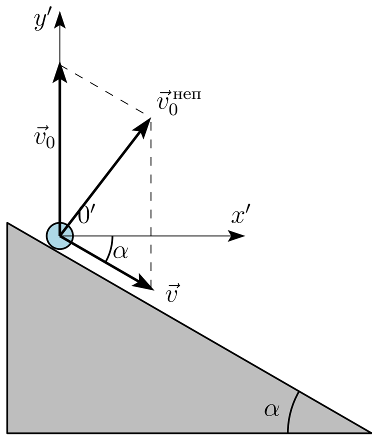


Рис. 1

Движение мячика является равнопеременным, в наивысшей точке траектории

$$v(t_{\text{под}}) = 0 = v_0 - gt_{\text{под}} \Rightarrow t_{\text{под}} = \frac{v_0}{g}, \tag{2}$$

а общее время движения $t_{\text{движ}} = t_{\text{под}} + t_{\text{пад}} = 2t_{\text{под}} = \frac{2v_0}{g}$.

За это время в неподвижной системе отсчёта время мальчик проехал

$$S = vt_{\text{движ}} = \frac{2v_0 v}{g} = 0{,}5 \text{ м}. \tag{3}$$

Задачу можно решить, перейдя из СО мальчика в неподвижную СО, воспользовавшись законом сложения скоростей:

$$\begin{aligned} \vec{v}_0^{\text{неп}} &= \vec{v}_0 + \vec{v}, \\ v_{0x}^{\text{неп}} &= v\cos\alpha, \\ v_{0y}^{\text{неп}} &= v_0 - v\sin\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения движения мячика и мальчика в неподвижной СО:

$$\begin{aligned} x_{\text{мяч}}(t) &= v_{0x}^{\text{неп}} t = v\cos\alpha t \\ y_{\text{мяч}}(t) &= v_{0y}^{\text{неп}} t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 - v\sin\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}, \\ x_{\text{мальчик}}(t) &= v\cos\alpha t, \\ y_{\text{мальчик}}(t) &= -v\sin\alpha t. \end{aligned} \tag{5}$$

В момент $t_{\text{движ}}$, когда мальчик поймает мячик, $y_{\text{мяч}}(t_{\text{движ}}) = y_{\text{мальчик}}(t_{\text{движ}})$ (а их $x$-координаты равны в каждый момент времени):

$$(v_0 - v\sin\alpha)\, t_{\text{движ}} - \frac{gt_{\text{движ}}^2}{2} = -v\sin\alpha t_{\text{движ}} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{движ}} = \frac{2v_0}{g}. \tag{6}$$

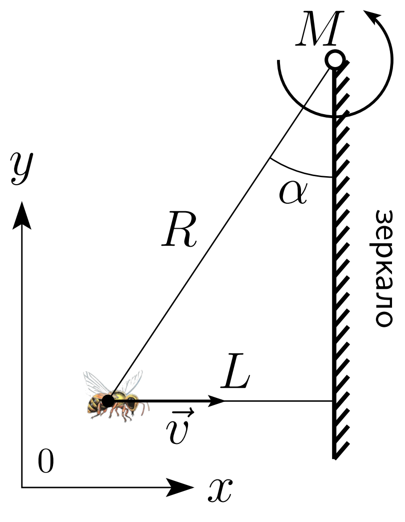
Далее аналогично первому способу получаем путь, пройденный мальчиком

$$S = vt_{\text{движ}} = \frac{2v_0 v}{g} = 0{,}5\ \text{м}. \qquad (7)$$

***Критерии оценивания задачи №1 (Мальчик-прогульщик).***

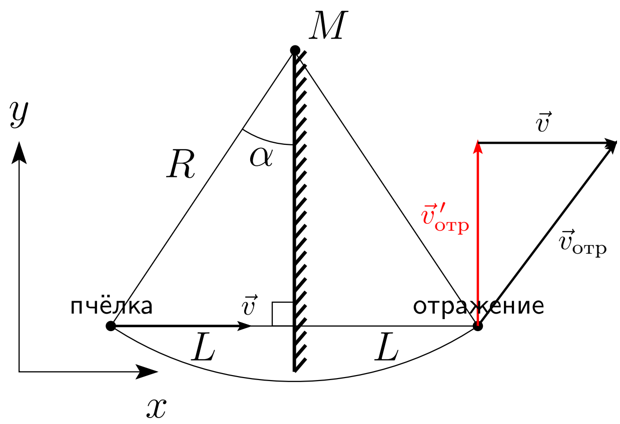
| **№** | **Критерий** | **Значение** | **Макс. балл** |
|---|---|---|---|
| 1 | Указано, что в СО мальчика вектор $\vec{v}_0$ направлен вертикально вверх | См. рисунок 1. | 3 |
| 2 | Указано равенство времен подъёма и падения в СО мальчика или записан закон сложения скоростей. | | 2 |
| 4 | Найдено время движения мячика | $t_{\text{движ}} = \frac{2v_0}{g}$ | 3 |
| 5 | Выражен и посчитан ответ. | $S = \frac{2v_0 v}{g} = 0{,}5$ м | 2 |

***Задача №2. Пчёлка и зеркало.*** В прямоугольной системе координат $x0y$ параллельно оси $0x$ летит пчёлка с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Перед ней расположено зеркало, вращающееся вокруг неподвижной оси $M$ с неизвестной угловой скоростью. Плоскость зеркала перпендикулярна плоскости $x0y$. В момент, когда зеркало оказалось параллельно оси $0y$, расстояние между пчёлкой и зеркалом равно $L = 0{,}5$ м, а расстояние между пчёлкой и осью вращения равно $R = 1$ м, при этом скорость изображения пчелы в зеркале с точки зрения самой пчелы направлена вдоль оси $0y$. 1) Определите, как в этот момент направлены скорости пчёлки и её изображения относительно зеркала. 2) Найти частоту вращения зеркала $n$ (ответ выразите в оборотах в минуту и округлите до десятых).




***Решение.*** Задачу можно решить с помощью построения.

Сделаем рисунок, обозначим на нём положения пчелы и её отражения (изображения), отметим размеры $L$ и $R$. Обозначим скорости пчелы и её отражения в неподвижной системе отсчёта (СО) как $\vec{v}$ и $\vec{v}_{\text{отр}}$.



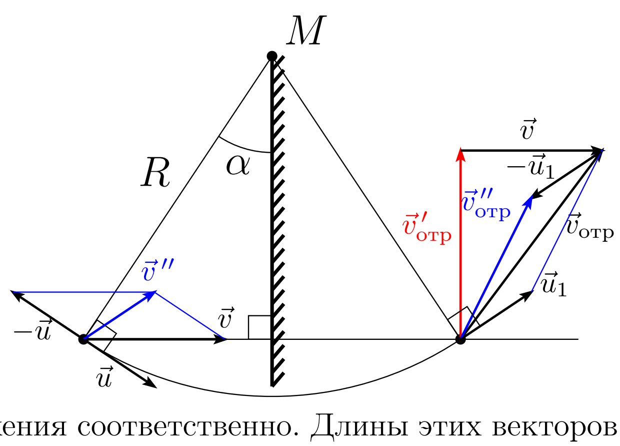

Скорость отражения относительно самой пчелы $\vec{v}'_{\text{отр}}$ по условию задачи направлена вертикально. Изобразим это на рисунке. Скорость отражения в неподвижной СО может быть найдена по закону сложения скоростей:

$$\vec{v}_{\text{отр}} = \vec{v}'_{\text{отр}} + \vec{v}.$$

Теперь перейдём в СО, вращающуюся вместе с зеркалом с её угловой скоростью $\omega$. Скорости пчелы $\vec{v}''$ и её отражения $\vec{v}''_{\text{отр}}$ во вращающейся СО также могут быть найдены с помощью закона сложения скоростей

$$\vec{v}'' = \vec{v} - \vec{u}$$

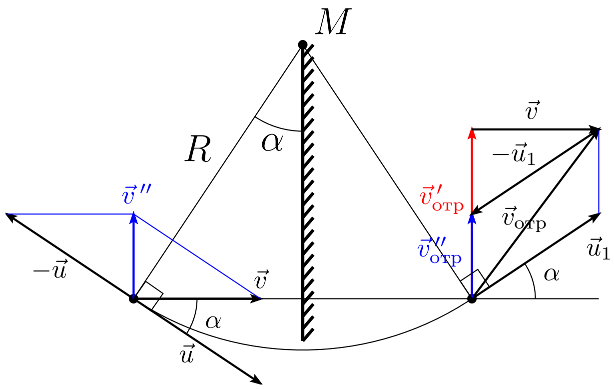
$$\vec{v}''_{\text{отр}} = \vec{v}_{\text{отр}} - \vec{u}_1,$$




где $\vec{u}$ и $\vec{u}_1$ — вектора линейных скоростей вращения СО в точках положения пчелы и отражения соответственно. Длины этих векторов составляют $\omega R$, а сами они направлены перпендикулярно радиус-векторам, проведённым от оси вращения к соответствующим точкам.

Во вращающейся СО, где зеркало покоится, вектора $\vec{v}''$ и $\vec{v}''_{\text{отр}}$ должны быть симметричны относительно зеркала (что не соблюдается на приведённом выше рисунке, на котором не учтено соотношение между $v$ и $u$). Заметим, что это может иметь место только если вектора $\vec{v}''$ и $\vec{v}''_{\text{отр}}$ направлены вертикально. Действительно, горизонтальные компоненты векторов $\vec{v}''$ и $\vec{v}''_{\text{отр}}$ составляют

$$v''_x = v - u_x = v - u\cos\alpha = v - \omega R\cos\alpha,$$
$$v''_{\text{отр}_x} = v - u_{1x} = v - \omega R\cos\alpha.$$




При этом в результате симметрии движения должно быть $v''_x = -v''_{\text{отр}_x}$, т.е. если $\vec{v}''$ и $\vec{v}''_{\text{отр}}$ направлены вертикально (вдоль оси $0y$). Это условие может быть выполнено только, если $v''_x = v''_{\text{отр}_x} = 0$. Таким образом,

$$v - \omega R\cos\alpha = 0 \Rightarrow v = \omega R\cos\alpha.$$

Корректная версия построения, с учётом симметрии скоростей $\vec{v}''$ и $\vec{v}''_{\text{отр}}$ приведена справа. Угловая скорость вращения зеркала:

$$\omega = \frac{v}{R\cos\alpha} = \frac{v}{R\cdot\dfrac{\sqrt{R^2-L^2}}{R}} = \frac{v}{\sqrt{R^2-L^2}}.$$

Наконец, частота вращения зеркала составляет

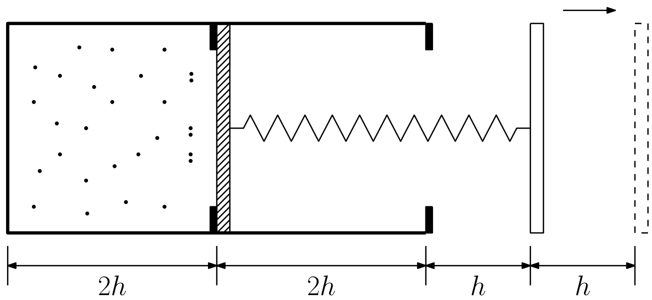
$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi\sqrt{R^2-L^2}} \approx 0{,}183\ \text{Гц} \approx 11{,}0\ \text{об./мин.}$$

*Замечание: задача может быть решена также и чисто аналитически, или графически с другой последовательностью переходов между СО, или путём поиска координат отражения как функции координат пчелы и угла поворота с последующим их дифференцированием по времени как производной сложной функции. Все решения, существенно отличающиеся от авторского, оцениваются в соответствии с инструкциями в пояснительной записке*

***Критерии оценивания задачи №2 (Пчёлка и зеркало)***

| № | Критерий | Значение | Макс. балл |
|---|---|---|---|
| 1 | В решении используется идея перехода в ИСО пчелки и/или вращающуюся систему отсчета, связанную с зеркалом. | | 1 |
| 2 | Верно показана связь скоростей изображения в лабораторной СО и в СО пчёлки( $\vec{v}_{\text{отр}}$ и $\vec{v}\,'_{\text{отр}}$). | $\vec{v}_{\text{отр}} = \vec{v}\,'_{\text{отр}} + \vec{v}$ или рисунок с соответствующим треугольником скоростей. | 1 |
| 3 | Верно применено правило сложения скоростей при переходе во вращающуюся систему отсчёта для скоростей пчёлки и отражения (*по 1 б. за каждую скорость*). | $\vec{v}\,'' = \vec{v} - \vec{u}$, $\vec{v}\,''_{\text{отр}} = \vec{v}_{\text{отр}} - \vec{u}_1$, или изображены соответствующие векторы и треугольники скоростей. | 2 |
| 4 | Связь линейной скорости вращения с угловой. | $u = u_1 = \omega R$ | 1 |
| 5 | Идея симметрии относительно плоскости зеркала скоростей пчёлки $\vec{v}\,''$ и отражения $\vec{v}\,''_{\text{отр}}$ во вращающейся системе отсчёта | | 1 |
| 6 | Показано, что скорости пчёлки $\vec{v}\,''$ и отражения $\vec{v}\,''_{\text{отр}}$ во вращающейся системе отсчёта направлены вдоль оси $0y$ (*по 1 б. за каждую скорость*). | Словесное описание, рисунок или запись $v''_x = v''_{\text{отр}_x} = 0$. | 2 |
| 7 | Получена формула для угловой скорости зеркала $\omega$ или для частоты вращения зеркала $n$ | $\omega = \dfrac{v}{\sqrt{R^2 - L^2}}$ или $n = \dfrac{v}{2\pi\sqrt{R^2 - L^2}}$. | 1 |
| 8 | Найдена величина частоты вращения зеркала $n$ | $n \approx 11{,}0$ об./мин. | 1 |

***Задача №3. Пружинчатая машина.*** Мальчик-экспериментатор захотел определить коэффициент жёсткости $k$ своей пружины, используя знания термодинамики. Он взял тепловую машину с одноатомным газом, поршень которой ограничен упорами и не может покинуть цилиндр. Цилиндр считаем идеально гладким – поршень движется без трения. Пружину он размещает на поршне и рейке, которая жёстко фиксирована и может быть сдвинута только вручную. Газ в отсеке медленно нагревают, поршень через некоторое время приходит в движение и выдвигается до упоров, после чего нагрев сразу же прекращается. Затем рейка отодвигается от своего начального положения, как показано на рисунке. Газ охлаждают и через некоторое время поршень начинает движение и возвращается на исходную позицию, причём конечная температура оказывается равной начальной, после чего рейку передвигают в исходное положение. 1) Изобразите график процесса на диаграмме $p-V$ и отметьте точку, с которой начинается описанный процесс. 2) Найдите коэффициент жёсткости пружины $k$, если известна длина пружины в нерастянутом состоянии $l = 5h$, переданная от нагревателя теплота $Q = 270$ Дж и $h = 10$ см. Давление в сосуде во много раз превышает внешнее давление.




***Решение.*** 1) Рассмотрим процесс 1–2, когда газ медленно нагревается и при этом происходит его расширение, тогда сила давления газа $pS$ уравновешивается силой упругости пружины $F_{\text{упр}} = k\Delta x$, где $\Delta x$ — деформация пружины — равна расстоянию от основания цилиндра до поршня. При этом $\Delta x = \frac{V}{S}$, $S$ — площадь поршня. Таким образом, давление в этом процессе

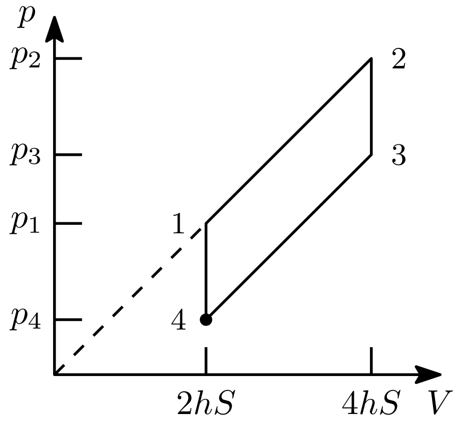
$$p_{12} = \frac{F_{\text{упр}}}{S} = k\frac{\Delta x}{S} \tag{1}$$

следовательно, график этого процесса — прямая, проходящая через начало координат. Аналогично, в процессе 3–4 сжатия газа из-за сдвига рейки деформация пружины уменьшится на величину $h$ и будет составлять $\Delta x' = \Delta x - h$, тогда в этом процессе

$$p_{34} = \frac{k}{S}(\Delta x - h). \tag{2}$$

Графиком этого процесса также является прямая, параллельная первой, но смещённая относительно неё вниз. Наконец, когда поршень достигает упоров будут иметь место изохорические процессы.

Теперь построим диаграмму процесса в координатах $p-V$. Начальной точкой процесса является точка 4, которая выделена на диаграмме, так как только в этом случае конечная температура совпадёт с начальной.




1) Начнём с процесса 1–2 на диаграмме, когда газ нагревается и при этом происходит его расширение. В соответствии с формулой (1) давления в состоянии 1 и 2 будет задаваться формулами

$$p_1 = 2\frac{k}{S}h, \quad p_2 = 4\frac{k}{S}h \tag{3}$$

2) В соответствии с формулой (2) найдём давления в точках 3 и 4:

$$p_3 = \frac{k}{S}(4h - h) = 3\frac{k}{S}h, \tag{4}$$

$$p_4 = \frac{k}{S}(2h - h) = \frac{k}{S}h \tag{5}$$

4) Найдем тепло, подводимое системе. Теплота поступает в систему на участках 4–1 и 1–2. Используем первое начало термодинамики и формулу для внутренней энергии одноатомного газа

$$Q = Q_{12} + Q_{41} = A_{12} + \Delta U_{12} + \Delta U_{41} = A_{12} + \Delta U_{42} \tag{6}$$

Работу $A_{12}$ можно найти как площадь под графиком

$$A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(4hS - 2hS) = 6kh^2. \tag{7}$$

Для внутренней энергии одноатомного газа справедлива формула

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\Delta(pV) \tag{8}$$

$$\Delta U_{42} = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = 21kh^2. \tag{9}$$

Подставляем формулы (8) и (7) в первое начало $Q = 27kh^2$. Откуда находим

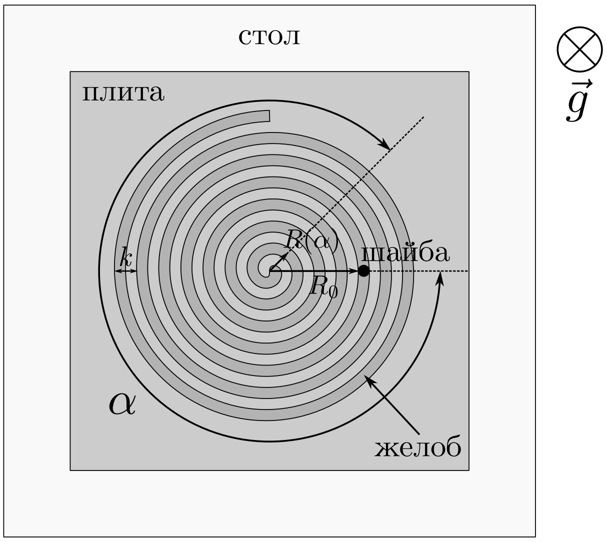
$$k = \frac{Q}{27h^2} \tag{10}$$

5) Подставляем численные значения и получаем $k = 1000$ Н/м.

***Критерии оценивания задачи №3. Пружинчатая машина***

| № | Критерий | Значение | Макс. балл |
|---|---|---|---|
| 1 | Нарисован график процесса на $p-V$ диаграмме. Отмечено, что начальной точкой процесса является точка 4 (левая нижняя) | Сделан рисунок. | 2 |
| 2 | Найдено, что при расширении газа сила упругости пружины пропорциональна объёму газа. | Формула (1). | 1 |
| 3 | Найдены давления в первом состоянии $p_1$ и во втором состоянии $p_2$. | Формула (3). | 1 |
| 4 | Найдено давление $p_4$. | Формула (5). | 1 |
| 5 | Использовано первое начало термодинамики. | $Q = A + \Delta U$. | 1 |
| 6 | Найдена работа газа при расширении. | Формула (7). | 1 |
| 7 | Получена расчетная формула. | Формула (10). | 2 |
| 8 | Получен численный результат. | $k = 1000$ Н/м. | 1 |

***Задача №4. Желоб-спираль.*** На столе лежит плита массы $M = 1$ кг, в которой вырезан несквозной жёлоб в виде плоской спирали, форма которой описывается уравнением $R(\alpha) = k\alpha/(2\pi)$, где $R$ — расстояние от центра спирали до данной точки, $k = 5$ см — шаг спирали, а $\alpha$ — угол поворота (в радианах) при движении от центра. По спирали может без трения скользить шайба массой $m = 100$ г. Исходно шайба покоится в жёлобе на расстоянии $R_0 = 1$ м от центра спирали. Коэффициент трения между плитой и столом $\mu = 0{,}1$.




а) Шайбу начали двигать с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 3$ рад/с, удаляя её от центра спирали, при этом прикладывая силу только по касательной к спирали. Найдите угловое перемещение шайбы $\Delta\alpha$ от начала движения до момента, когда плита начёт скользить по столу.

б) Шайбе придали начальную скорость $v_0 = 3$ м/с, направленную по касательной к спирали так, что шайба движется к центру. Найдите угловое перемещение шайбы $\Delta\alpha$ от начала движения до момента, когда плита начёт скользить по столу.

Все численные ответы выразите в радианах и округлите до десятых. Шайба все время движения находится внутри спирального жёлоба и не может оттуда вылететь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

***Решение.*** В процессе движения шайбы по жёлобу на неё действует сила реакции стенки жёлоба, направленная горизонтально и перпендикулярно скорости шайбы. Значит шайба имеет только нормальное ускорение (центростремительное), а тангенциальное ускорение равно нулю. Выражение для ускорения шайбы:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

а с учетом связи линейной и угловой скорости $v = \omega R$ ускорение можно записать как

$$a = \omega^2 R$$

Строго говоря, во всех этих выражениях должен стоять радиус кривизны траектории шайбы, но в силу малости шага спирали по сравнению с начальным радиусом ($\frac{k}{R_0} << 1$) можно за текущий радиус кривизны принять текущий радиус спирали.

Запишем второй закон Ньютона для шайбы в скалярном виде в проекции на горизонтальную нормаль к траектории: $ma = N$, где $N$ — модуль силы нормальной реакции опоры стенки желоба.

Запишем второй закон Ньютона для плиты в векторном виде: $M\vec{a}_{\text{плиты}} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$.

Пока плита покоится, её ускорение равно нулю, так что по модулю $N = F_{\text{тр}}$. Сила трения покоя не превосходит силы трения скольжения: $F_{\text{тр}} \leq \mu g(m+M)$. В силу $ma = N = F_{\text{тр}}$, получаем условие того, что плита покоится:

$$ma < \mu g(m+M)$$

Для того, чтобы дальнейшее решение было корректным, следует проверить, что при данных начальных условиях плита будет покоиться:

$m\omega_0^2 R < \mu g(m+M)$, подставляя начальные условия $0{,}9 < 1{,}1$, убеждаемся в том, что в пункте а) изначально плита покоится.

Аналогично и для пункта б): $m\dfrac{v_0^2}{R} < \mu g(m+M)$, получаем верное неравенство $0{,}9 < 1{,}1$

Моментом начала движения плиты будем считать ситуацию $ma = \mu g(m+M)$. Найдем критический радиус $R_{\text{кр}}$, при котором плита сдвинется. Для случая а), подставляя выражение для ускорения, выраженного через $\omega$

$$m\omega^2 R_{\text{кр}} = \mu g(m+M), \text{ то есть} R_{\text{кр}} = \frac{\mu g(m+M)}{m\omega^2}.$$

$$R(\alpha) = \frac{k}{2\pi}\cdot\alpha \Rightarrow \Delta\alpha = \frac{2\pi}{k}(R_{\text{кр}} - R_0)$$

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{k}\left(\frac{\mu g(m+M)}{m\omega^2} - R_0\right), \Delta\alpha = \frac{80\pi}{9} \approx 27{,}9 \text{ рад} \tag{1}$$

При решении случая б) необходимо заметить, что работа всех внешних сил, действующих на шайбу, пока плита покоится, равна нулю, так как эти силы (точнее, сила реакции опоры) направлены перпендикулярно движению шайбы в любой точке траектории. Так что выполняется закон сохранения полной механической энергии, которая в данном случае состоит только из кинетической:

$$\frac{mv^2}{2} = \text{const}, \text{, то есть} v = v_0 = \text{const}$$

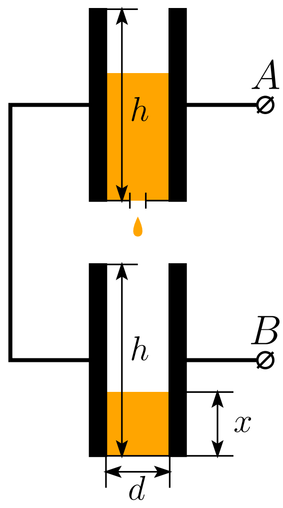
Для случая б), подставляя ускорение шайбы, выраженное через скорость, получаем: $R_{\text{кр}} = \dfrac{mv_0^2}{\mu g(m+M)}$, а угловое перемещение $\Delta\alpha = \dfrac{2\pi}{k}(R_0 - R_{\text{кр}})$

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{k}\left(R_0 - \frac{mv_0^2}{\mu g(m+M)}\right), \Delta\alpha = \frac{80\pi}{11} \approx 22{,}8 \text{ рад} \tag{2}$$

*Замечание по решению: решение также может считаться верным, если в нем использовалось не центростремительное ускорение шайбы, а центробежная сила, действующая со стороны шайбы на плиту во вращающейся системе отсчета. Вариант такого решения учтен в критериях (там $F_{цб}$ - центробежная сила).*

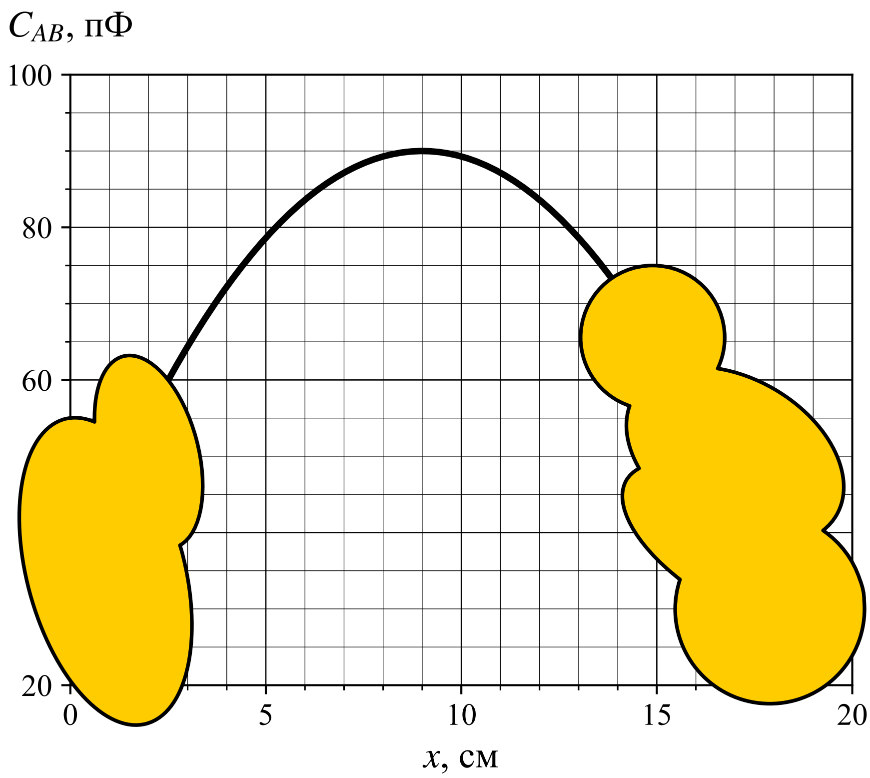
***Критерии оценивания задачи №4.***

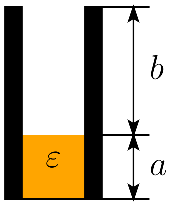
| № | Критерий | Значение | Макс. балл |
|---|---|---|---|
| 1 | Записано выражение для центростремительного ускорения или для центробежной силы через линейную скорость. | $a = \frac{v^2}{R}$ или $F_{цб} = m\frac{v^2}{R}$. | 0,5 |
| 2 | Записано выражение для центростремительного ускорения или для центробежной силы через угловую скорость. | $a = \omega^2 R$ или $F_{цб} = m\omega^2 R$. | 0,5 |
| 3 | Записано условие, при котором плита покоится и проверено, что для начальных условий задачи оно выполняется. | $ma < \mu g(m + M)$ или $F_{цб} < \mu g(m + M)$ | 2 |
| 4 | Записано условие, при котором плита сдвинется. | $ma = \mu g(m + M)$ или $F_{цб} = \mu g(m + M)$ | 0.5 |
| 5 | Для пункта а) найдено выражение для вычисления критического радиуса, при котором плита сдвигается, или записано эквивалентное выражение. | $R_{кр} = \frac{\mu g(m+M)}{m\omega^2}$. | 1,5 |
| 6 | Для пункта б) записан закон сохранения кинетической энергии. | $\frac{mv^2}{2} = const$. | 1,5 |
| 7 | Для пункта б) найдено выражение для вычисления критического радиуса, при котором плита сдвигается, или записано эквивалентное выражение. | $R_{кр} = \frac{mv_0^2}{\mu g(m+M)}$ | 1,5 |
| 8 | Найдены итоговые выражения для углового перемещения, вычислено значение в радианах (по 1 баллу за каждый пункт) | Для пункта а) - строка (1).<br>Для пункта б) - строка (2) | 2 |




***Задача №5. Утечка в конденсаторе.*** Школьник Саша проводит эксперимент с системой из двух одинаковых плоских конденсаторов, соединённых так, как показано на рисунке. Каждая пластина конденсаторов имеет ширину $l = 20$ см и неизвестную высоту $h$, пространство между пластинами верхнего конденсатора заполнено маслом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$, при этом масло может вытекать из верхнего конденсатора в нижний через отверстие. Исходно верхний конденсатор был полон маслом, а нижний — пуст. Саша измерил зависимость ёмкости $C_{AB}$ системы между точками $A$ и $B$ от высоты масла $x$ в нижнем конденсаторе. Саша построил график этой зависимости, но случайно пролил на него масло. Определите, чему равна высота одной обкладки конденсатора $h$, расстояние $d$ между пластинами конденсатора, ёмкость системы $C_1$ при заполненном верхнем конденсаторе и ёмкость $C_2$ при заполненном нижнем конденсаторе.

Примечание. Электрическая постоянная СИ $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Ёмкость на графике выражена в пикофарадах: 1 пФ $= 10^{-12}$ Ф. Краевыми эффектами можно пренебречь.






***Решение.*** Рассчитаем ёмкость частично заполненного маслом конденсатора. Такой конденсатор можно рассматривать как два параллельно соединённых конденсатора: заполненный маслом конденсатор с ёмкостью $C_{\text{зап}}$ и незаполненный с ёмкостью $C_{\text{нез}}$. Обозначим высоту масла $a$, а высоту воздушного зазора $b$. Тогда

$$C_{\text{зап}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S_{\text{зап}}}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 al}{d}, \quad C_{\text{нез}} = \frac{\varepsilon_0 S_{\text{нез}}}{d} = \frac{\varepsilon_0 bl}{d}. \tag{1}$$

Полная ёмкость частично заполненного конденсатора:

$$C = C_{\text{зап}} + C_{\text{нез}} = \frac{\varepsilon_0 l(\varepsilon a + b)}{d}. \tag{2}$$

Для нижнего конденсатора $a = x$, $b = h - x$, его ёмкость:

$$C_{\text{ниж}} = \frac{\varepsilon_0 l(\varepsilon x + h - x)}{d} = \frac{\varepsilon_0 l\left(h + (\varepsilon - 1)x\right)}{d}. \tag{3}$$

Для верхнего конденсатора $a = h - x$, $b = x$, его ёмкость:

$$C_{\text{верх}} = \frac{\varepsilon_0 l\left(\varepsilon(h - x) + x\right)}{d} = \frac{\varepsilon_0 l\left(\varepsilon h - (\varepsilon - 1)x\right)}{d}. \tag{4}$$

Верхний и нижний конденсаторы соединены последовательно, их общая ёмкость:

$$C_{AB} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_{\text{ниж}}} + \dfrac{1}{C_{\text{верх}}}} = \frac{C_{\text{ниж}}C_{\text{верх}}}{C_{\text{ниж}} + C_{\text{верх}}} = \frac{\varepsilon_0 l\left(h + (\varepsilon - 1)x\right)\left(\varepsilon h - (\varepsilon - 1)x\right)}{d(\varepsilon + 1)h}. \tag{5}$$

Выполнив преобразования, получим

$$C_{AB} = \frac{\varepsilon_0 l\left(-(\varepsilon - 1)^2 x^2 + (\varepsilon - 1)^2 hx + \varepsilon h^2\right)}{d(\varepsilon + 1)h}. \tag{6}$$

Отсюда видно, что график $C_{AB}(x)$ будет иметь форму параболы. Обозначим выражение в скобках в числителе (6) как $y(x)$:

$$y(x) = -(\varepsilon - 1)^2 x^2 + (\varepsilon - 1)^2 hx + \varepsilon h^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \tag{7}$$

$x$-координата вершины параболы:

$$x_{\text{верш}} = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{(\varepsilon - 1)^2 h}{-2(\varepsilon - 1)^2} = \frac{h}{2}. \tag{8}$$

По графику из условия $x_{\text{верш}} = 9$ см, отсюда высота пластины конденсатора будет равна $h = 2x_{\text{верш}} = 18$ см. При этом максимальная ёмкость системы:

$$C_{\text{макс}} = C_{AB}\left(x_{\text{верш}}\right) = \frac{\varepsilon_0 l\left(-(\varepsilon - 1)^2\ \frac{h^2}{4} + (\varepsilon - 1)^2 \frac{h^2}{2} + \varepsilon h^2\right)}{d(\varepsilon + 1)h} = \frac{\varepsilon_0 lh(\varepsilon + 1)}{4d}. \tag{9}$$

По графику $C_{\text{макс}} = 90$ пФ, следовательно, расстояние между пластинами конденсатора равно

$$d = \frac{\varepsilon_0 lh(\varepsilon + 1)}{4C_{\text{макс}}} = 8{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \approx 9\ \text{мм}. \tag{10}$$

Ёмкость системы $C_1$ при полностью заполненном верхнем конденсаторе:

$$C_1 = C_{AB}(0) = \frac{\varepsilon_0 l \cdot \varepsilon h^2}{d(\varepsilon+1)h} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 l h}{d(\varepsilon+1)} = 32{,}4 \cdot 10^{-12}\ \Phi = 32{,}4\ \text{п}\Phi. \tag{11}$$

Поскольку система полностью симметрична, ёмкость $C_2$ при заполненном маслом нижнем конденсаторе будет иметь точно такое же значение:

$$C_2 = C_1 = 32{,}4\ \text{п}\Phi. \tag{12}$$

***Критерии оценивания задачи №1.***

| № | Критерий | Значение | Макс. балл |
|---|---|---|---|
| 1 | Указано (или используется в вычислениях), что заполненную и незаполненную части частично заполненного конденсатора можно считать параллельно соединёнными | | 1 |
| 2 | Указано (или используется в вычислениях), что верхний и нижний конденсаторы соединены последовательно. | | 1 |
| 3 | Получена формула для полной ёмкости системы. | Формула (6) | 1 |
| 4 | Установлено, что максимальная ёмкость системы будет при наполовину заполненных конденсаторах. | $x_{\text{верш}} = \frac{h}{2}$ | 1 |
| 5 | Определена высота пластины. | $h = 2x_{\text{верш}} = 18$ см | 1 |
| 6 | Получена формула для ёмкости системы при наполовину заполненных конденсаторах. | Формула (9) | 1 |
| 7 | Определено расстояние между пластинами. | $d = 8{,}85 \cdot 10^{-3}$ м $\approx 9$ мм | 1 |
| 8 | Получена формула для ёмкости системы при полностью заполненном одном из конденсаторов. | Формула (11) | 1 |
| 9 | Определена ёмкость $C_1$. | $C_1 = 32{,}4$ пФ | 1 |
| 10 | Определена ёмкость $C_2$. | $C_2 = 32{,}4$ пФ | 1 |