

10 класс

Второй день

- 10.6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что $\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} = 4$. Могут ли слова Сергея быть правдой?
- 10.7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?
- 10.8. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности.
- 10.9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел $a + bc, b + ca, c + ab$ является простым делителем числа $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.
- 10.10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?