

Тренерский штаб сборной России по астрономии и астрофизике
Методическая комиссия олимпиады школьников по астрономии имени В. Я. Струве



III Олимпиада школьников по астрономии имени В. Я. Струве

Региональный этап

Задания, решения и критерии оценивания

Методическое пособие

Москва
2024

УДК 52(076.1)

ББК 22.6

III Олимпиада школьников по астрономии имени В. Я. Струве. Региональный этап. Задания, решения и критерии оценивания : методическое пособие — М.: 2024. — 31 с.

Олимпиада школьников по астрономии имени В. Я. Струве проводится для учащихся 7–8-х классов как дополнение к Всероссийской олимпиаде школьников по астрономии, в последних этапах которой принимают участие 9–11-классники. Олимпиада проводится для популяризации астрономии и других естественных наук, а также для выявления на раннем этапе способных и талантливых учащихся и их привлечения к систематическим занятиям астрономией. Первая олимпиада им. Струве состоялась 26 января 2022 года. С 2023 года олимпиада проводится в два этапа: региональный и заключительный.

Комплект заданий подготовлен методической комиссией олимпиады школьников по астрономии имени В. Я. Струве
struve.astroedu.ru • struve@astroedu.ru

Авторы-составители: Веселова А. В., СПбГУ (Санкт-Петербург)
Волобуева М. И., ПФМЛ № 239 (Санкт-Петербург)
Шамбин А. И., АГУ, РЕМШ (Республика Адыгея)
Утешев И. А., МФТИ, ЦПМ (Москва)

Рецензенты: Автаева А. А., Институт астрономии РАН
Булыгин И. И., МГУ им. М. В. Ломоносова, ЦПМ (Москва)
Раменский М. С., НИУ ВШЭ, ЦПМ (Москва)

Тренерский штаб сборной России по астрономии и астрофизике выражает благодарность Министерству просвещения Российской Федерации и Московскому физико-техническому институту за поддержку инициативы по проведению олимпиады; Беспятому Илье Витальевичу за иллюстрации к «практическим» заданиям №№ 7.6 и 8.6.

Содержание

Общие указания для жюри	4
7 класс	7
7.1 Резонансное затмение	7
7.2 Космические гонки	9
7.3 Таинственный остров	11
7.4 Тяжёлая вода	13
7.5 Глизе не отвести	15
7.6 Ветер перемен	17
8 класс	19
8.1 Резонансное затмение	19
8.2 Космические гонки	20
8.3 Таинственный остров	22
8.4 Удаление Бетельгейзе	24
8.5 Планета в глазури	26
8.6 Провал века	28
Справочные данные	31

Общие указания для жюри

Характеристика комплекта заданий

Комплект содержит по 6 задач для участников каждого класса. Похожие задачи для разных классов имеют одинаковые названия, но, возможно, разное содержание.

Решение задач №№ 1–5 оценивается из 8 баллов, решение задачи № 6 — из 10 баллов. Максимальный результат — 50 баллов. **Итоговый результат по 100-балльной шкале** равен удвоенному суммарному баллу участника.

Принципы оценивания олимпиадных работ

1. Правильное решение оценивается полным баллом, при этом оно не обязано повторять авторское буквально или логически. Частично верное или совершенно неверное решение оценивается соответственно частичным баллом или нулём.

2. Решение участника разбивается на логические элементы (шаги). Каждый из шагов оценивается независимо в соответствии с критериями, приведёнными после авторского решения задачи. Оценка за задачу равна сумме оценок за каждый из критериев. За каждый из критериев выставляется *целая неотрицательная* оценка. Если критерием предусмотрен штраф, он применяется к полной оценке за критерий. Штрафы в пределах одного критерия складываются*.

3. Каждый критерий оценивается независимо. За одну и ту же ошибку участник не может быть «наказан» дважды.

Так, если критерии подразумевают выполнение последовательности действий и участник допускает ошибку, оценка снижается только за соответствующий шаг, а последующие результаты должны пересчитываться и оцениваться так, будто промежуточный ответ был правильным.

Исключение: если участник получил и проигнорировал заведомо абсурдный ответ (конечный или промежуточный), оценка снижается за все связанные критерии вплоть до нуля.

* Например, если критерий в 3 балла подразумевает вычисление некоторой величины (3 балла), и при этом участник допускает арифметическую ошибку (–1 балл), то итоговая оценка за этот критерий составляет 2 балла.

4. Оригинальные решения, не совпадающие с авторскими, оцениваются по аналогии, если в них возможно выделить аналогичные шаги.

Решение участника может оказаться более эффективным, чем авторское. В таком случае «выпадающие» критерии оцениваются в полном объёме.

5. Если участник совершает ошибку, не предусмотренную в критериях, член жюри самостоятельно определяет величину штрафа.

Оценка *не снижается* за плохой почерк, помарки, недостатки оформления и прочие не относящиеся к сути решения участника элементы, но может быть снижена за запись численных ответов с заведомо абсурдной точностью.

6. Для выставления справедливой оценки необходимо учесть *всю проделанную участником работу*. Некоторые правильные идеи и догадки, имеющие отношение к корректному решению задачи, могут быть оценены суммарно в 1–2 балла даже при отсутствии конкретных продвижений.

7. Не оцениваются элементы, не имеющие отношения к решению конкретной задачи: отвлечённые факты и произвольные формулы. Однако если правильное решение содержит необязательные дополнения и комментарии с грубыми физическими и астрономическими ошибками, оценка может быть снижена.

8. В особенно сложных случаях члены жюри могут обратиться за консультацией в методическую комиссию олимпиады по адресу **struve@astroedu.ru**.

Организация работы жюри и подведение итогов

1. Жюри осуществляет деятельность в соответствии с пунктом 11 Положения об олимпиаде и пунктами 23–35 Регламента организации и проведения регионального этапа олимпиады. Эти документы опубликованы на сайте олимпиады struve.astroedu.ru.

2. Член жюри, ответственный за проверку какой-либо задачи, для обеспечения единообразия проверки должен проверить её решение у *всех* участников соответствующего класса.

3. Каждая задача проверяется независимо двумя членами жюри. В протокол жюри вносится *одна* согласованная оценка за задачу — целое число.

Проверявшие задачу члены жюри проводят совместное обсуждение работ, по оценке которых возникли разногласия. Если устранить разногласия не удалось, окончательное решение принимает председатель жюри или уполномоченный им член жюри.

При расхождении оценок за задачу на 1 балл допустимо считать итоговой наибольшую из них без дополнительного обсуждения.

4. Результат участника получается путём сложения итоговых оценок за все задачи. В протоколе также указывается **итоговый результат по 100-балльной шкале**, который равен удвоенному суммарному баллу участника.

5. До подведения итогов олимпиады жюри обязано провести показ работ (по запросам участников) и рассмотреть апелляции о несогласии с выставленными баллами.

6. Рассмотрение апелляции проводится в спокойной и доброжелательной обстановке. *Каждый может ошибаться.*

7. Жюри определяет победителей и призёров олимпиады в пределах квоты, установленной организатором олимпиады в субъекте Российской Федерации, исходя из распределения результатов участников каждого класса в отдельности.

Рекомендуется избегать ситуаций, когда граница между участниками с разным статусом проводится при небольшой разнице результатов.

При определении победителей и призёров крайне рекомендуется исходить исключительно из относительного распределения результатов участников, без оглядки на потенциально возможный максимальный результат. В частности, Положением об олимпиаде *не предусмотрены ограничения* для признания победителем или призёром олимпиады участника, набравшего менее 50 % от максимума.

7 класс

7.1 Резонансное затмение

Известно, что спутники Юпитера Ио, Европа и Ганимед находятся в орбитальном резонансе $4 : 2 : 1$. Иными словами, их периоды обращения вокруг Юпитера соотносятся как целые числа, причём период обращения Европы в 2 раза больше, чем у Ио, но в 2 раза меньше, чем у Ганимеда. Также известно, что все три спутника обращаются в одной плоскости и могут отбрасывать тень на поверхность Юпитера.

Какое минимальное и максимальное количество «двойных» (то есть происходящих одновременно) солнечных затмений, вызванных этими спутниками, может произойти на Юпитере за один оборот Ганимеда? Заметим, что «тройных» затмений при этом не бывает.

Возможное решение. Периоды обращения спутников Юпитера существенно меньше, чем его период обращения вокруг Солнца: несколько дней против почти 12 лет. Поэтому возможно пренебречь орбитальным движением Юпитера и считать, что затмения Солнца каждым из спутников повторяются ровно через один оборот этого спутника вокруг Юпитера.

Так как периоды обращения спутников соотносятся как целые числа, спутники «встречаются» (выстраиваются в одну линию с центром Юпитера) всегда в одних и тех же точках своих орбит. Так, Ио и Европа имеют одно фиксированное «место встречи», и между «встречами» проходит ровно два оборота Ио и один оборот Европы. Аналогичная ситуация происходит для Европы и Ганимеда. У Ио и Ганимеда точек «встречи» несколько; желающие могут рассчитать, что их три: за период обращения Ганимеда Ио совершает 4 оборота, то есть на 3 оборота больше, чем Ганимед.



Рис. 1: «Места встречи» спутников

Двойное солнечное затмение происходит, когда точка «встречи» двух спутников оказывается между Солнцем и Юпитером. Отсутствие тройных затмений означает, что все точки «встречи» различны, и за один оборот Ганимеда возможно наблюдать затмения только от какой-то одной пары спутников: другие точки «встречи» будут удалены от линии «Солнце – Юпитер». В зависимости от положения Юпитера на орбите у этой линии может вообще не оказаться таких точек. Тогда двойные затмения какое-то время вообще не будут наблюдаться; **минимальное количество затмений равно нулю.**

Осталось выбрать самый благоприятный случай. Очевидно, можно сразу отбросить сближения с Ганимедом: он повторно окажется в точке сближения с любым другим спутником только через свой орбитальный период, по окончании обозначенного времени. Поэтому нас интересует пара Ио – Европа.

Пусть затмение произошло в «нулевой» момент времени. Следующее двойное затмение произойдёт через 1 оборот Европы и 2 оборота Ио. При этом пройдёт половина периода обращения Ганимеда. Следующее (третье) двойное затмение произойдёт через такой же промежуток времени, и Ганимед завершит свой оборот. Так как затмения не являются мгновенными событиями и имеют некоторую длительность, можно включить в расчёт затмения на обоих «концах» рассматриваемого периода. Следовательно, **максимальное количество затмений равно трём.**

Критерии оценивания:

1	Солнечное затмение наблюдается, когда спутник оказывается между Солнцем и Юпитером	1
2	Резонанс фиксирует точки «встречи» спутников	1
3	Поскольку «тройные» затмения не наблюдаются, все точки «встречи» различны	1
4	Обоснование и результат для минимального количества затмений	1 + 1
5	Обоснование и результат для максимального количества затмений	2 + 1
Всего		8

Баллы за отдельные ответы без надлежащего и корректного обоснования (хотя бы и неполного) не выставляются, даже если ответы угаданы верно.

7.2 Космические гонки

Анализируя спектр источника излучения, можно определить скорость его приближения или удаления относительно наблюдателя. Находясь на Земле, астроном изучает внесолнечную планетную систему — звезду с обращающейся вокруг неё экзопланетой. Орбита экзопланеты находится в плоскости орбиты Земли и видна «с ребра». Астроном обнаружил, что звезда приближается к Солнечной системе со скоростью 10 км/с, а скорость обращения экзопланеты вокруг этой звезды равна 20 км/с.

С какой максимальной скоростью экзопланета может приближаться к Земле? Удаляться от неё? Чему равна минимальная (по модулю) скорость экзопланеты относительно Земли? Земля обращается вокруг Солнца со скоростью 30 км/с.

Возможное решение. Скорость экзопланеты относительно Земли складывается из трёх *независимых* компонент:

- орбитальной скорости экзопланеты v_p относительно звезды,
- скорости звезды v_r относительно Солнечной системы,
- орбитальной скорости Земли v_{\oplus} относительно Солнца.

При этом первая и последняя компоненты меняются в зависимости от положения экзопланеты и Земли на своих орбитах: так, в некоторый момент времени Земля будет двигаться со скоростью 30 км/с по направлению к звезде, а через полгода — с той же скоростью удаляться от неё.

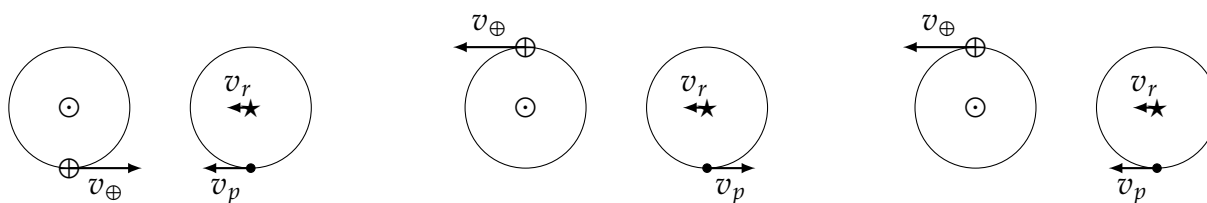
Для начала определим возможные значения скорости экзопланеты относительно Солнечной системы, то есть без учёта движения Земли. Если экзопланета к нам приближается, то её орбитальная скорость складывается со скоростью звезды, так что максимальная скорость приближения к Солнцу равна $v_p + v_r = 20 + 10 = 30$ км/с. Если экзопланета удаляется, то с учётом скорости звезды получаем наибольшую возможную гелиоцентрическую скорость удаления $v_p - v_r = 20 - 10 = 10$ км/с.

Теперь учтём скорость Земли. **Максимальная скорость сближения** получится, если Земля будет двигаться навстречу экзопланете: итоговая скорость сближения составит

$$v_p + v_r + v_{\oplus} = 30 + 30 = \mathbf{60 \text{ км/с.}}$$

Для максимизации скорости удаления скорость Земли должна быть направлена от звезды; **наибольшая скорость удаления** экзопланеты от Земли составит

$$v_p - v_r + v_{\oplus} = 10 + 30 = \mathbf{40 \text{ км/с.}}$$



(a) Максимальная возможная скорость сближения

(b) Максимальная возможная скорость удаления

(c) Минимальный модуль относительной скорости

Рис. 2: Различные конфигурации Земли и экзопланеты

Заметим, что если скорость экзопланеты направлена к Солнцу, а скорость Земли — от звезды (то есть в том же направлении), то результирующая скорость экзопланеты относительно Земли равна

$$v_p + v_r - v_{\oplus} = 30 - 30 = 0 \text{ км/с,}$$

что и является **минимально возможной по модулю скоростью**.

Критерии оценивания:

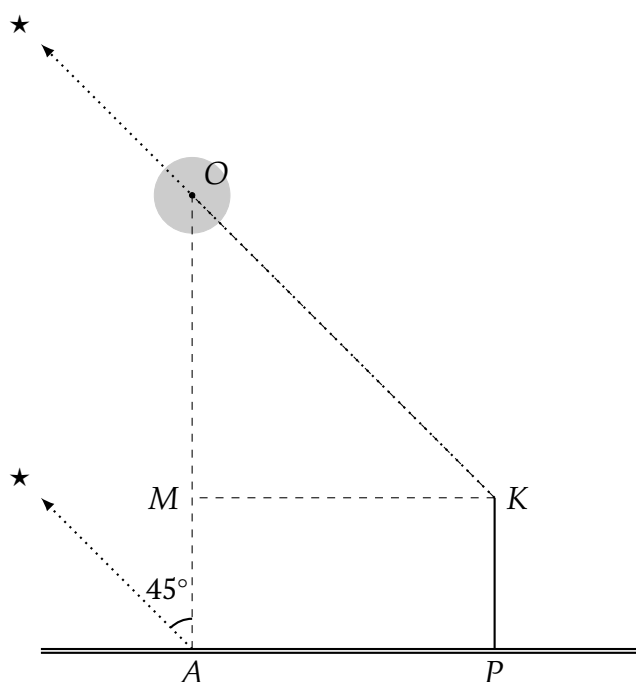
1	Скорость экзопланеты относительно Земли складывается из трёх компонент	2
2	Максимальная скорость сближения: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
3	Максимальная скорость удаления: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
4	Минимальный модуль относительной скорости экзопланеты: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
Всего		8

7.3 Таинственный остров

Любитель ночных пейзажей решил сфотографировать небольшой остров в море на фоне звёздного неба. Он обнаружил, что при съёмке из точки A , ближайшей к острову точки прямого берега, Полярная звезда наблюдается в 45° к западу от острова. Следующей ночью наблюдатель решил сфотографировать остров с крайней точки пирса, расположенного в 300 метрах от точки A . Полярная звезда при этом оказалась прямо над островом. Определите расстояние от берега до острова, если известно, что пирс перпендикулярен береговой линии и имеет длину 50 метров.

Словарь. Пирс — сооружение, выступающее в акваторию водоёма и служащее для швартовки судов или в рекреационных целях (купание, рыбалка и т. п.).

Возможное решение. Изобразим описанную в условии ситуацию на чертеже:



Точка A — ближайшая к острову O точка берега, поэтому прямая OA перпендикулярна береговой линии. Пусть P — основание пирса и K — его крайняя точка. Опустим из точки K перпендикуляр KM на прямую OA . В результате получаем прямоугольник $AMKP$, где $KM = AP = 300$ м, $AM = KP = 50$ м.

Поскольку Полярная звезда (★) является очень далёким объектом и указывает направление на север как из точки A , так и с края пирса, прямые $A\star$ и $K\star$ параллельны. Следовательно, $\angle MOK = 45^\circ$, и прямоугольный треугольник OKM — равнобедренный, так что $OM = KM = 300$ м.

В результате получаем, что расстояние от берега до острова есть

$$AM + OM = 50 + 300 = \mathbf{350 \text{ м.}}$$

Критерии оценивания:

1	Корректный чертёж: геометрия чертежа позволяет определить искомое расстояние	2
2	Направления на Полярную параллельны	1
3	<i>Пирс с правильной стороны</i>	1
4	Выделение прямоугольника	1
5	Решение треугольника	2
6	Ответ	1
Всего		8

7.4 Тяжёлая вода

Внесолнечная планета Kepler-62 e, обнаруженная у звезды Kepler-62 в созвездии Лиры, считается возможной планетой-океаном. Масса планеты равна 4.5 массам Земли, радиус составляет 1.6 радиуса Земли. Во сколько раз средняя плотность планеты больше плотности воды? Средняя плотность Земли составляет 5.5 г/см^3 .

Возможное решение. Будем считать экзопланету шарообразной. Тогда её объём связан с радиусом соотношением

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Средняя плотность планеты есть отношение её массы к объёму:

$$\rho := \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Определим отношение средних плотностей планеты и Земли:

$$\frac{\rho}{\rho_{\oplus}} = \frac{M/V}{M_{\oplus}/V_{\oplus}} = \frac{M}{M_{\oplus}} \cdot \frac{V_{\oplus}}{V} = \frac{M}{M_{\oplus}} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{M_{\oplus}} \cdot \left(\frac{R_{\oplus}}{R}\right)^3 = \frac{4.5}{1} \times \left(\frac{1}{1.6}\right)^3 = 1.1.$$

Тогда плотность планеты составит $1.1 \times 5.5 \approx 6 \text{ г/см}^3$, что **в 6 раз выше плотности воды**, равной 1.0 г/см^3 .

Отметим, что для решения задачи достаточно понимания того, что объём шара пропорционален кубу радиуса, так что средняя плотность

$$\rho \propto \frac{M}{R^3}.$$

Коэффициент пропорциональности сокращается при вычислении отношения плотностей. Допустимо также рассчитать среднюю плотность планеты непосредственно:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4.5M_{\oplus}}{\frac{4}{3}\pi(1.6R_{\oplus})^3} = \frac{4.5 \times 5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{\frac{4}{3}\pi \times (1.6 \times 6.37 \cdot 10^6 \text{ м})^3} \approx 6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 6 \text{ г/см}^3.$$

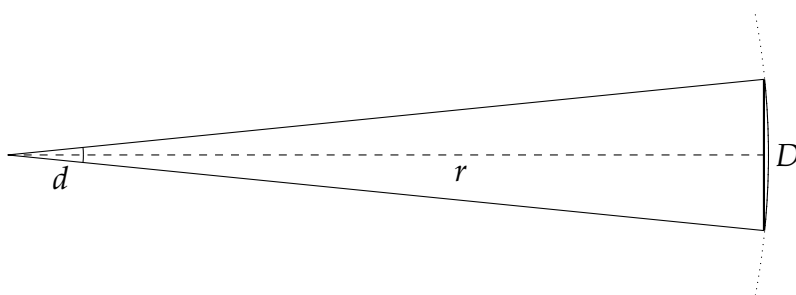
Критерии оценивания:

1	Утверждение о пропорциональности $V \propto R^3$ либо выражение для объёма $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ или аналог	2
	<i>Неверный коэффициент, если приводится равенство</i>	-1
	<i>Неверный показатель степени</i>	-2
2	Утверждение о пропорциональности $\rho \propto MV^{-1}$ либо выражение $\rho = M/V$	2
3	Вычисление плотности планеты непосредственно или в сравнении с Землёй исходя из формул участника , допустима погрешность 10 %	3
	<i>Арифметическая ошибка</i>	-1
4	Вычисление отношения плотности планеты и воды исходя из полученного участником значения плотности, допустима погрешность 10 %	1
Всего		8

7.5 Глизе не ответит

В далёком будущем исследователи космоса высаживаются на поверхность планеты Gliese 581 с, обращающейся вокруг звезды Gliese 581 на расстоянии 0.07 а. е. Радиус звезды составляет 0.3 радиуса Солнца. Каким будет видимый угловой диаметр звезды при наблюдении с планеты?

Возможное решение. Угловой размер — это угол d , под которым объект с линейным размером D видит наблюдатель, удалённый на расстояние r .



В случае малого углового размера (центрального угла) дуга окружности радиусом r при малом центральном угле d неотличима от стягивающей её хорды. Длина дуги окружности прямо пропорциональна соответствующему ей центральному углу, а полному углу в 360° соответствует длина всей окружности $2\pi r$.

В таком случае для длины хорды справедливо выражение

$$D \approx 2\pi r \cdot \frac{d}{360^\circ},$$

и угловой размер возможно рассчитать как

$$d = \frac{D}{r} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}.$$

Осуществим подстановку:

$$d = \frac{2 \cdot 0.3R_\odot}{0.07 \text{ а. е.}} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{2 \times 0.3 \times 697 \cdot 10^3 \text{ км}}{0.07 \times 1.496 \cdot 10^8 \text{ км}} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 2.3^\circ.$$

Альтернативное решение. Известно, что видимый с Земли угловой диаметр Солнца составляет $32' \approx 0.5^\circ$.

Определим, во сколько раз отличаются видимые размеры Gliese 581 при наблюдении с планеты Gliese 581 с и Солнца при наблюдении с Земли, считая, что $d \propto D/r$:

$$\frac{d}{d_\odot} = \frac{D/r}{D_\odot/r_\odot} = \frac{D}{D_\odot} \cdot \frac{r_\odot}{r} = \frac{2 \cdot 0.3R_\odot}{2R_\odot} \times \frac{1 \text{ а. е.}}{0.07 \text{ а. е.}} = \frac{0.3}{0.07} \approx 4.3.$$

Тогда видимый диаметр звезды окажется равным $4.3 \times 32' = 138' = 2.3^\circ$.

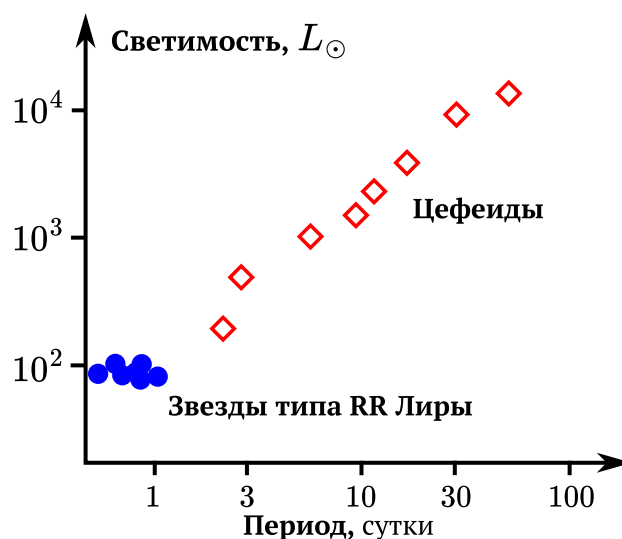
Критерии оценивания:

1	Утверждение о пропорциональности видимого размера радиусу звезды либо использование такой пропорциональности в формуле	2
2	Утверждение о обратной пропорциональности видимого размера расстоянию до звезды либо использование такой пропорциональности в формуле	2
3	Вычисление отношения видимых размеров звезды и Солнца и вычисление углового диаметра звезды (в угловых минутах или других единицах измерения углов) либо вычисление угловых размеров иным корректно обоснованным способом, допустима погрешность 10 %	2 + 2
	<i>Участник перепутал радиус и диаметр</i>	-2
	<i>Арифметическая ошибка</i>	-1
Всего		8

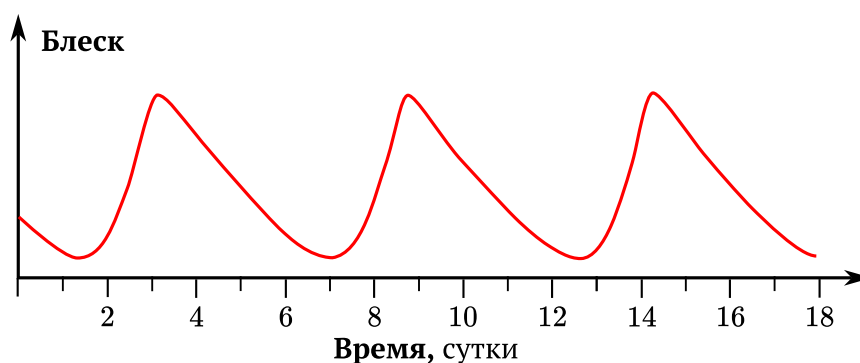
7.6 Ветер перемен

Некоторые звёзды периодически изменяют свой блеск, причём период колебаний может быть напрямую связан со средней светимостью звезды (количеством энергии, которую звезда излучает за единицу времени).

На рисунке справа представлена зависимость «период — светимость» для двух типов переменных звёзд. Светимость выражена в светимостях Солнца L_{\odot} .

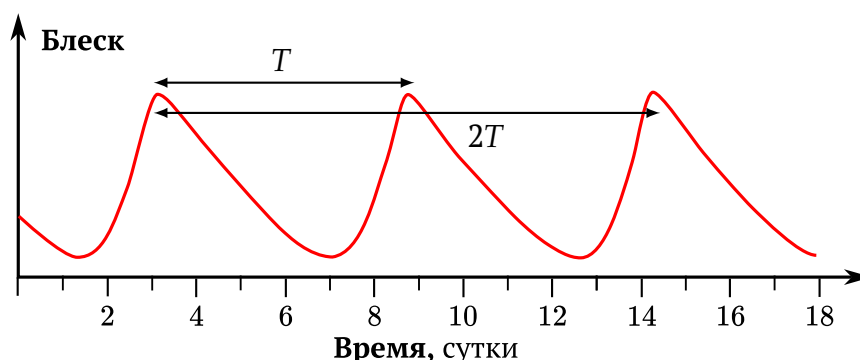


Вам также дана кривая блеска (рис. ниже) — зависимость блеска некоторой звезды от времени. Определите период изменения блеска этой звезды. К какому из двух типов переменных она принадлежит? Объясните свой выбор.



Возможное решение. Период — это наименьший промежуток времени, через который система возвращается в исходное состояние. На графике это соответствует минимальному промежутку времени между двумя точками, когда блеск звезды одинаков и дальнейшее его изменение носит также одинаковый характер. Например, за период T можно принять промежуток времени между двумя последовательными минимумами или двумя последовательными максимумами.

Чтобы уменьшить влияние погрешностей измерений, имеет смысл измерить отрезок в несколько периодов, а потом разделить полученный результат на соответствующее количество периодов. Впрочем, в этой задаче выбор метода на точность существенно не повлияет.



Для начала определим масштаб изображения с помощью линейки. Пусть путём измерений получили, что отрезок в 18 суток (от 0 до 18 сут. по оси абсцисс) равен X мм (не будем приводить конкретное значение: оно может получиться разным в зависимости от настроек печати организаторов). Теперь измерим отрезок между первым и третьим максимумами на графике, получим Y мм. В этот отрезок укладывается два полных периода изменения блеска. Продолжительность одного периода равна

$$Y \cdot \frac{18}{X} \cdot \frac{1}{2} \approx 5.6 \text{ сут.}$$

Как видно из диаграммы «период — светимость», переменные типа RR Лиры являются короткопериодическими: характерный период изменения их блеска практически не превышает 1 суток. Сделаем вывод, что наша переменная принадлежит к классу **цефеид**.

Кстати, оба типа переменных широко используются в астрономии в качестве «стандартных свечей»: известная светимость позволяет определить расстояние до них.

Критерии оценивания:

а1	Описание метода определения периода	2
а2	Масштаб графика (хотя бы неявно)	2
а3	Период от 5.5 до 5.7 сут. (от 5 до 6 сут.)	3 1
б	Тип переменной <i>с обоснованием</i>	3
Всего		10

8 класс

8.1 Резонансное затмение

Известно, что спутники Юпитера Ио, Европа и Ганимед находятся в орбитальном резонансе $4 : 2 : 1$. Иными словами, их периоды обращения вокруг Юпитера соотносятся как целые числа, причём период обращения Европы в 2 раза больше, чем у Ио, но в 2 раза меньше, чем у Ганимеда. Также известно, что все три спутника обращаются в одной плоскости и могут отбрасывать тень на поверхность Юпитера.

Какое минимальное и максимальное количество «двойных» (то есть происходящих одновременно) солнечных затмений, вызванных этими спутниками, может произойти на Юпитере за один оборот Ганимеда? Заметим, что «тройных» затмений при этом не бывает.

См. решение задачи 7.1, страница 7.

8.2 Космические гонки

Анализируя спектр источника излучения, можно определить скорость его приближения или удаления относительно наблюдателя. Находясь на Земле, астроном изучает внесолнечную планетную систему — звезду с обращающейся вокруг неё экзопланетой. Орбита экзопланеты находится в плоскости орбиты Земли и видна «с ребра». Астроном обнаружил, что звезда приближается к Солнечной системе со скоростью 15 км/с, а скорость обращения экзопланеты вокруг этой звезды равна 20 км/с.

С какой максимальной скоростью экзопланета может приближаться к Земле? Удаляться от неё? Чему равна минимальная (по модулю) скорость экзопланеты относительно Земли? Земля обращается вокруг Солнца со скоростью 30 км/с.

Возможное решение. Скорость экзопланеты относительно Земли складывается из трёх *независимых* компонент:

- орбитальной скорости экзопланеты v_p относительно звезды,
- скорости звезды v_r относительно Солнечной системы,
- орбитальной скорости Земли v_{\oplus} относительно Солнца.

При этом первая и последняя компоненты меняются в зависимости от положения экзопланеты и Земли на своих орбитах: так, в некоторый момент времени Земля будет двигаться со скоростью 30 км/с по направлению к звезде, а через полгода — с той же скоростью удаляться от неё.

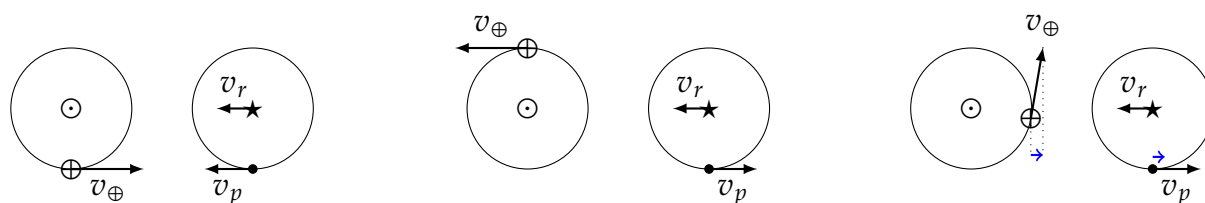
Для начала определим возможные значения скорости экзопланеты относительно Солнечной системы, то есть без учёта движения Земли. Если экзопланета к нам приближается, то её орбитальная скорость складывается со скоростью звезды, так что максимальная скорость приближения к Солнцу равна $v_p + v_r = 20 + 15 = 35$ км/с. Если экзопланета удаляется, то с учётом скорости звезды получаем наибольшую возможную гелиоцентрическую скорость удаления $v_p - v_r = 20 - 15 = 5$ км/с.

Теперь учтём скорость Земли. **Максимальная скорость сближения** получится, если Земля будет двигаться навстречу экзопланете: итоговая скорость сближения составит

$$v_p + v_r + v_{\oplus} = 35 + 30 = 65 \text{ км/с.}$$

Для максимизации скорости удаления скорость Земли должна быть направлена от звезды; **наибольшая скорость удаления** экзопланеты от Земли составит

$$v_p - v_r + v_{\oplus} = 5 + 30 = 35 \text{ км/с.}$$



(a) Максимальная возможная скорость сближения

(b) Максимальная возможная скорость удаления

(c) Минимальный модуль относительной скорости

Рис. 3: Различные конфигурации Земли и экзопланеты

Заметим, что скорости как Земли, так и экзопланеты могут быть направлены под углом к линии «Солнце – звезда». Тогда приближению (удалению) планеты будет соответствовать не вся орбитальная скорость, а только её часть. Например, если экзопланета удаляется от Солнца со скоростью 5 км/с, можно подобрать положение Земли на орбите так, чтобы она приближалась к звезде с такой же скоростью, и тогда относительная скорость экзопланеты относительно Земли будет **нулевой**. Поскольку модуль скорости неотрицателен, это и есть **минимально возможная по модулю** геоцентрическая скорость экзопланеты.

Критерии оценивания:

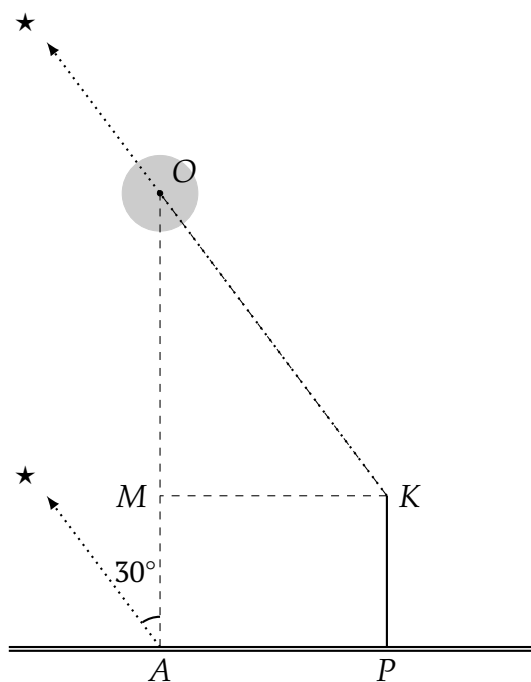
1	Скорость экзопланеты относительно Земли складывается из трёх компонент	2
2	Максимальная скорость сближения: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
3	Максимальная скорость удаления: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
4	Минимальный модуль относительной скорости экзопланеты: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
Всего		8

8.3 Таинственный остров

Любитель ночных пейзажей решил сфотографировать небольшой остров в море на фоне звёздного неба. Он обнаружил, что при съёмке из точки A , ближайшей к острову точки прямого берега, Полярная звезда наблюдается в 30° к западу от острова. Следующей ночью наблюдатель решил сфотографировать остров с крайней точки пирса, расположенного в 300 метрах от точки A . Полярная звезда при этом оказалась прямо над островом. Определите расстояние от берега до острова, если известно, что пирс перпендикулярен береговой линии и имеет длину 50 метров.

Словарь. Пирс — сооружение, выступающее в акваторию водоёма и служащее для швартовки судов или в рекреационных целях (купание, рыбалка и т. п.).

Возможное решение. Изобразим описанную в условии ситуацию на чертеже:



Точка A — ближайшая к острову O точка берега, поэтому прямая OA перпендикулярна береговой линии. Пусть P — основание пирса и K — его крайняя точка. Опустим из точки K перпендикуляр KM на прямую OA . В результате получаем прямоугольник $AMKP$, где $KM = AP = 300$ м, $AM = KP = 50$ м.

Поскольку Полярная звезда (\star) является очень далёким объектом и указывает направление на север как из точки A , так и с края пирса, прямые $A\star$ и $K\star$ параллельны. Отсюда получаем, что в прямоугольном треугольнике OKM $\angle O = 30^\circ$, так что гипотенуза OK в 2 раза больше противолежащего катета KM и равна $300 \times 2 = 600$ м.

Теперь по теореме Пифагора возможно найти второй катет:

$$OM = \sqrt{OK^2 - KM^2} = \sqrt{600^2 - 300^2} \approx 520 \text{ м.}$$

В результате получаем, что расстояние от берега до острова есть

$$AM + OM = 50 + 520 = \mathbf{570 \text{ м.}}$$

Критерии оценивания:

1	Корректный чертёж: геометрия чертежа позволяет определить искомое расстояние	2
2	Направления на Полярную параллельны	1
3	<i>Пирс с правильной стороны</i>	1
4	Выделение прямоугольника	1
5	Решение треугольника	2
6	Ответ	1
Всего		8

8.4 Удаление Бетельгейзе

В 2007 году была получена оценка годового параллакса Бетельгейзе, равная $6.55 \cdot 10^{-3}$ угловой секунды. В 2020 году была получена оценка, равная $5.95 \cdot 10^{-3}$ угловой секунды. На сколько процентов бóльшим получается расстояние до Бетельгейзе по данным 2020 года по сравнению с 2007 годом?

Заметим: различие оценок не связано с собственным движением Бетельгейзе в пространстве, а только с погрешностью измерения параллакса. Какая пространственная скорость соответствовала бы такому перемещению, будь оно реальным?

Возможное решение. Расстояние, выраженное в парсеках, обратно пропорционально годовому параллаксу, выраженному в угловых секундах. Такая пропорциональность следует как из определения парсека (расстояние, с которого 1 астрономическая единица видна под углом в 1 угловую секунду), так и из приближения малых углов (малый угловой размер объекта обратно пропорционален расстоянию до него).

Определим, каким расстояниям соответствовали полученные значения годового параллакса Бетельгейзе:

$$r_1 = \frac{1 \text{ пк}}{6.55 \cdot 10^{-3}} = 152.7 \text{ пк},$$

$$r_2 = \frac{1 \text{ пк}}{5.95 \cdot 10^{-3}} = 168.1 \text{ пк}.$$

Отметим, что возможно и более подробное вычисление исходя из определения годового параллакса. Можно заметить, что его величина равна углу, под которым радиус орбиты Земли виден из окрестности звезды. В случае малого углового размера его величина в радианной мере примерно равна отношению линейного размера к расстоянию в тех же единицах длины. Для оценки параллакса 2007 года соотношение примет вид

$$\frac{6.55 \cdot 10^{-3}''}{206265''/\text{рад}} = \frac{1 \text{ а. е.}}{r_1},$$

откуда $r_1 = 3.15 \cdot 10^7$ а. е., что при переводе в парсеки из расчёта $1 \text{ пк} = 206\,265$ а. е. даёт результат 152.7 пк. Аналогичным образом получается значение $r_2 = 168.1$ пк.

Разность расстояний составляет $168.1 - 152.7 = 15.4$ пк. Переводим эту величину в долю оценки 2007 года, затем переводим ответ в проценты:

$$\frac{15.4}{152.7} \times 100\% \approx 10\%.$$

Различие параллаксов дало разницу расстояний в 15.4 пк. Неизвестно, в какие моменты года были получены оценки параллакса, поэтому будем считать, что изменение произошло за 13 лет. Тогда соответствующая «скорость движения» звезды (напоминаем, что речь идёт не о действительном смещении) равна отношению «пройденного расстояния» и промежутка времени, за которое это расстояние «пройдено».

Возможно сразу получить величину «скорости» в парсеках в год:

$$v = \frac{15.4 \text{ пк}}{13 \text{ лет}} = 1.2 \text{ пк/год.}$$

Величина выглядит большой, но насколько реалистичной? Вспомним, что 1 парсек равен примерно 3.26 светового года (в справочных данных приведено значение парсека в метрах, а величина светового года определяется домножением скорости света на длительность года в секундах). В таком случае скорость перемещения Бетельгейзе окажется равной ≈ 4 световых года за год, то есть в 4 раза выше скорости света: $v \approx 1.2 \cdot 10^6$ км/с.

Критерии оценивания:

1	Обратная пропорциональность годового параллакса в секундах дуги и расстояния в парсеках либо формула связи углового расстояния, линейного размера и расстояния до объекта	2
2	Оценка расстояний до Бетельгейзе в любых одинаковых единицах длины, допустима погрешность 10 % <i>Арифметическая ошибка</i>	1 + 1 -1
3	Оценка разности расстояний исходя из полученных участником значений расстояний, допустима погрешность 10 %	1
4	Определение разности расстояний в процентах от оценки 2007 года исходя из полученных участником значений , допустима погрешность 10 % <i>Арифметическая ошибка</i>	1 -1
5	Определение скорости удаления звезды в любых единицах измерения скорости исходя из полученных участником значений расстояний , допустима погрешность 10 % <i>Арифметическая ошибка</i>	1 -1
6	Указание на превышение звездой скорости света	1
Всего		8

8.5 Планета в глазури

Представим планету-гигант моделью из трех слоёв: вокруг плотного ядра расположен менее плотный твёрдый слой, выше которого находится атмосфера. В таблице приведены границы слоёв в процентах радиуса планеты и средние плотности вещества этих слоёв. Определите среднюю плотность планеты.

Граничное расстояние от центра, % радиуса	25	85	100
Плотность, г/см ³	8.0	2.0	0.4

Возможное решение. Средняя плотность планеты равна отношению её массы к объёму. Масса планеты складывается из трёх компонент: массы шарообразного ядра, масс среднего и внешнего слоя-атмосферы. Плотности компонент известны; необходимо найти объёмы ядра и двух слоёв.

Объёмы планеты V и ядра V_1 вычислим по формуле объёма шара. Обозначим радиус планеты как R , тогда

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0.25R)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 0.25^3.$$

Объём сферического слоя равен разности объёмов шаров с радиусами, равными внешнему и внутреннему радиусам слоя. Тогда

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0.85R)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0.25R)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \times (0.85^3 - 0.25^3);$$

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (1.00R)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0.85R)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \times (1.00^3 - 0.85^3).$$

Общая масса планеты

$$M = V_1\rho_1 + V_2\rho_2 + V_3\rho_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \left(0.25^3\rho_1 + (0.85^3 - 0.25^3)\rho_2 + (1.00^3 - 0.85^3)\rho_3\right),$$

откуда средняя плотность

$$\langle\rho\rangle = \frac{M}{V} = 0.25^3\rho_1 + (0.85^3 - 0.25^3)\rho_2 + (1.00^3 - 0.85^3)\rho_3$$

$$= 0.25^3 \times 8.0 + (0.85^3 - 0.25^3) \times 2.0 + (1.00^3 - 0.85^3) \times 0.4 = 1.5 \text{ г/см}^3.$$

Критерии оценивания:

1	Утверждение о пропорциональности $V \propto R^3$ для ядра либо выражение $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ <i>Неверный коэффициент, если приводится равенство</i> <i>Неверный показатель степени</i>	2 -1 -2
2	Запись выражений для объёма среднего слоя и атмосферы как разностей объёмов шаров или как объёмов сферических слоёв с подстановкой радиусов исходя из полученного участником выражения для объёма шара	1×3
3	Запись формулы для средней плотности как отношения полной массы к полному объёму	1
4	Запись формулы для полной массы как суммы масс компонент с подстановкой массы как произведения объёма и плотности исходя из полученных участником выражений для объёмов	1
5	Вычисление средней плотности планеты исходя из полученного участником выражений , допустима погрешность 10%	1
Всего		8

Если участник оценивает среднюю плотность планеты как среднее арифметическое плотностей слоёв, за решение выставляется не более 2 баллов.

8.6 Провал века

На рис. 4 (страница 29) представлена кривая блеска — зависимость блеска некоторой звезды от времени. На графике отчётливо видны моменты кратковременного падения блеска, вызванного прохождением экзопланеты по диску звезды.

- а) Определите период обращения этой экзопланеты вокруг звезды.
- б) Во сколько раз радиус звезды больше радиуса экзопланеты? Считайте прохождение центральным.
- в) Как называются такие планеты?

Возможное решение. Период обращения экзопланеты вокруг звезды равен промежутку времени между её прохождениями по диску звезды для земного наблюдателя, то есть между «провалами». Формально возможно напрямую измерить длину отрезка, соответствующего одному периоду. Чтобы уменьшить влияние погрешностей измерений, имеет смысл измерить отрезок в несколько периодов, а потом разделить полученный результат на соответствующее количество периодов. Так, первый минимум приходится на отметку времени в 1.2 суток, третий — 5.6 суток. Тогда период обращения планеты равен

$$\frac{5.6 - 1.2}{2} = 2.2 \text{ сут.}$$

Когда экзопланета оказывается между звездой и наблюдателем, она закрывает часть диска звезды, что и вызывает видимое уменьшение яркости, причём это уменьшение пропорционально доле закрытой площади диска. Как видно из графика, во время транзита планета закрывает от наблюдателя долю площади диска звезды

$$1 - 0.99325 = 0.00675.$$

Строго говоря, отношение видимых площадей дисков звезды и экзопланеты зависит от отношения их *угловых* размеров (так, для земного наблюдателя Луна может целиком закрыть Солнце, хотя физические размеры Луны гораздо меньше). Но ввиду того, что расстояние от Земли до звезды и экзопланеты гораздо больше, чем расстояние между экзопланетой и звездой, возможно считать, что их видимые угловые радиусы относятся так же, как и линейные.

Обозначим радиусы планеты и звезды как r и R . Тогда

$$\pi r^2 = 0.00675 \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{1}{0.00675}} \approx 12.$$

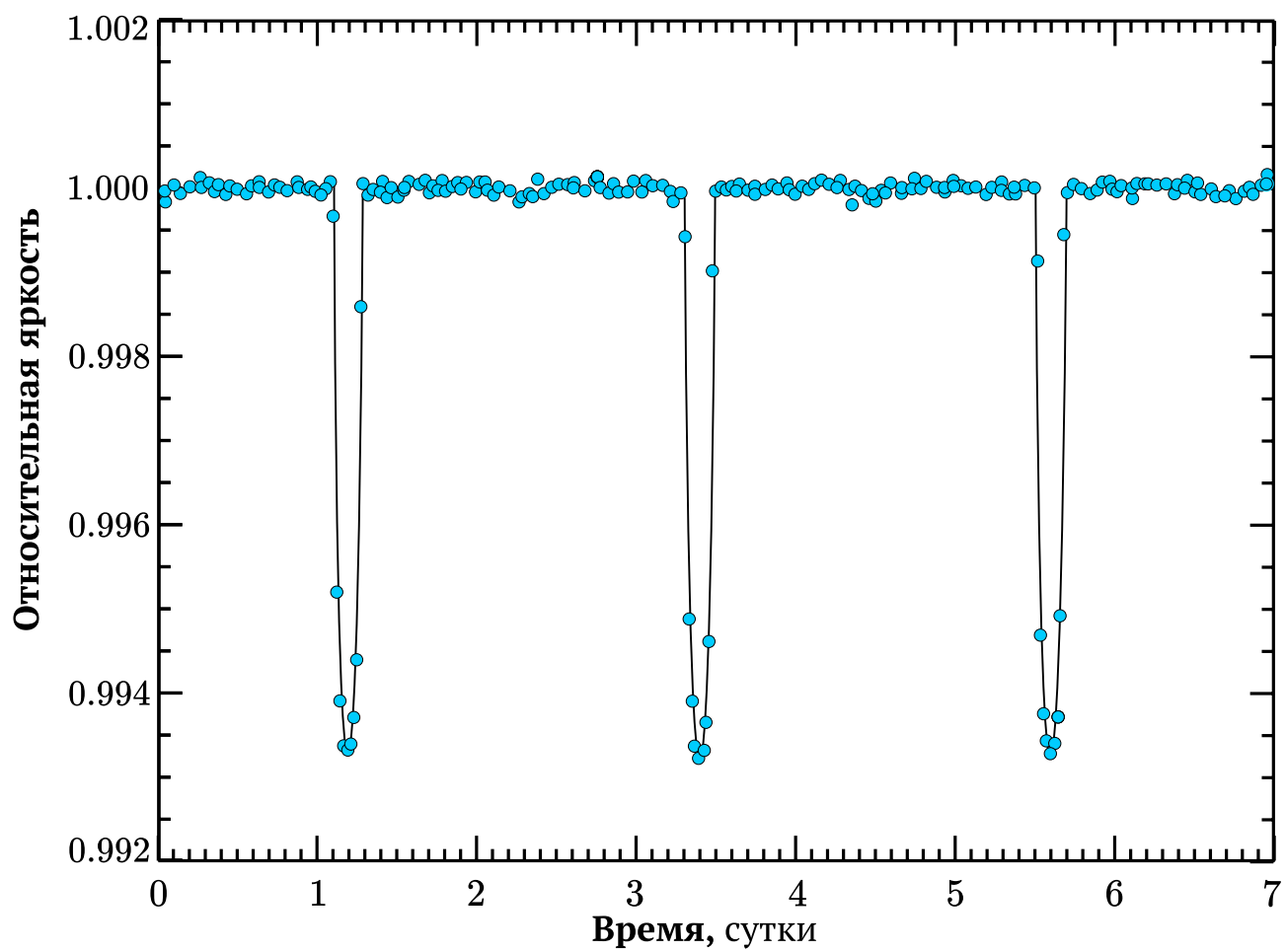


Рис. 4: Кривая блеска к задаче 8.6

Как видно, планета достаточно велика (для сравнения: радиус Юпитера меньше радиуса Солнца примерно в 10 раз). При этом столь малый (пара суток) период обращения говорит о том, что планета расположена к своей звезде очень близко. Такие экзопланеты принято называть **горячими юпитерами**.

Критерии оценивания:

а1	Описание метода определения периода	1
а2	Масштаб графика (хотя бы неявно)	1
а3	Период от 2.1 до 2.3 сут. <i>от 2.0 до 2.4 сут.</i>	2 <i>1</i>
б1	Яркость пропорциональна видимой площади диска звезды	1
б2	Падение блеска по графику	1
б3	Отношение размеров звезды и планеты	3
в	Это горячий юпитер	1
Всего		10

Справочные данные

Некоторые основные физические и астрономические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Масса протона	$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса электрона	$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Астрономическая единица	$1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Парсек	$1 \text{ пк} = 206\,265 \text{ а. е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$

Данные о Солнце, Земле и Луне

Светимость Солнца	$L_{\odot} = 3.88 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot} = -26.8^{\text{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot, \text{eff}} = 5.8 \cdot 10^3 \text{ К}$
Поток энергии на расстоянии Земли	$E_{\odot} = 1.4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$
Тропический год	$= 365.24219 \text{ сут.}$
Средняя орбитальная скорость	$= 29.8 \text{ км/с}$
Звёздные сутки	$= 23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 04 \text{ с}$
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23.44^{\circ}$
Сидерический месяц	$= 27.32 \text{ сут.}$
Синодический месяц	$= 29.53 \text{ сут.}$
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_{\zeta} = -12.7^{\text{m}}$

Характеристики Солнца, планет Солнечной системы и Луны

	Радиус орбиты, а. е.	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, 10^3 км	Осевой период
☉ Солнце			$1.989 \cdot 10^{30}$	697	25.38 сут.
☿ Меркурий	0.3871	87.97 сут.	$3.302 \cdot 10^{23}$	2.44	58.65 сут.
♀ Венера	0.7233	224.70 сут.	$4.869 \cdot 10^{24}$	6.05	243.02 сут.
♁ Земля	1.0000	365.26 сут.	$5.974 \cdot 10^{24}$	6.37	23.93 ч
☾ ↔ Луна	0.0026	27.32 сут.	$7.348 \cdot 10^{22}$	1.74	<i>синхр.</i>
♂ Марс	1.5237	686.98 сут.	$6.419 \cdot 10^{23}$	3.40	24.62 ч
♃ Юпитер	5.2028	11.862 лет	$1.899 \cdot 10^{27}$	71.5	9.92 ч
♄ Сатурн	9.5388	29.458 лет	$5.685 \cdot 10^{26}$	60.3	10.66 ч
♅ Уран	19.1914	84.01 лет	$8.683 \cdot 10^{25}$	25.6	17.24 ч
♆ Нептун	30.0611	164.79 лет	$1.024 \cdot 10^{26}$	24.7	16.11 ч