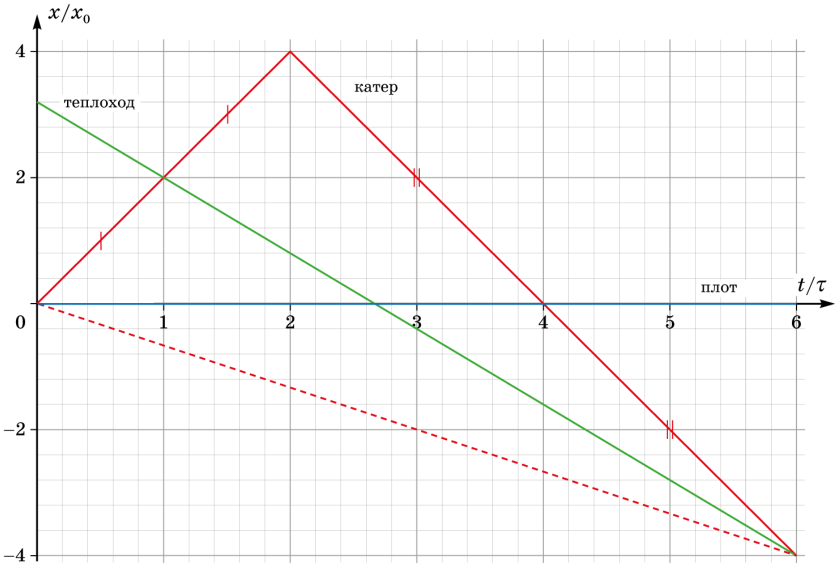
8 класс

Задача №8-Т1. Черти

Обозначим скорость реки - u, а скорости катера и теплохода в СО реки - $v_к$ и $v_т$ соответственно.

Графические методы решения

1 метод (графический в СО реки):



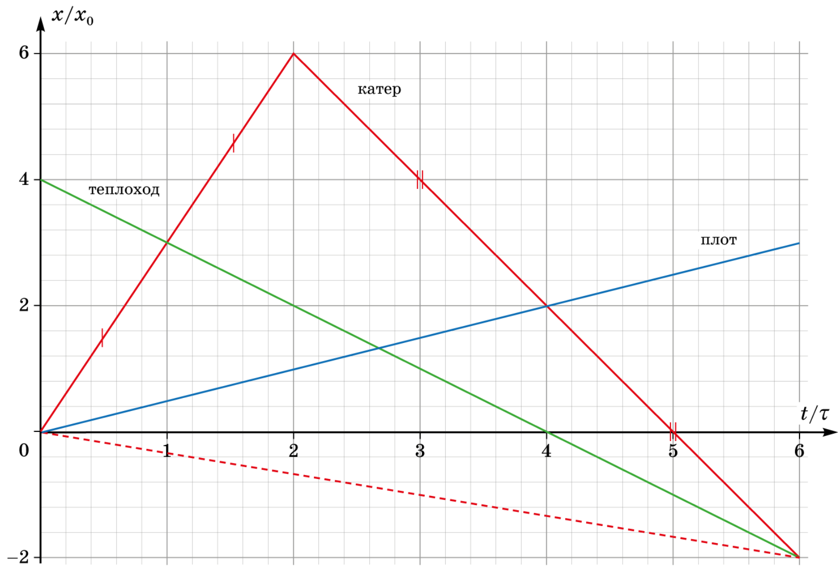
Построим графики зависимостей координат тел в подвижной системе отсчета, связанной с рекой, от времени. Катер и до, и после разворота плыл со скоростью $v_к$. Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ, а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени 6τ. Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, катер прошел $10x_0$ (x_0 - условная единица) , а теплоход - $6x_0$. Следовательно,

$$\frac{v_к}{v_т} = \frac{5}{3}.$$

2 метод (графический в СО Земли):



Построим графики зависимостей координат тел в системе отсчета Земли. Относительно плота катер и до, и после разворота плыл со скоростью $v_к$. Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени 4τ, а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени 6τ. Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, перемещение катера составило $(v_к - u)4\tau - (v_к + u)\tau$, а перемещение теплохода – $(v_т - u)5\tau$. Приравнивая соответствующие перемещения, получим

$$\frac{v_к}{v_т} = \frac{5}{3}$$

Аналитические методы решения

3 метод (аналитический в СО Земли):

Запишем уравнения движения тел в СО Земли:

$$\begin{cases} x_{\text{п}} = ut \\ x_{\text{к}} = (v_{\text{к}} + u)t, \text{при } t \in [0{,}2\tau] \\ x_{\text{к}} = (v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(t - 2\tau), \text{при } t > 2\tau \\ x_{\text{т}} = x_0 - (v_{\text{т}} - u)t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ:

$$x_0 - (v_{\text{т}} - u)\tau = (v_{\text{к}} + u)\tau,$$

откуда $x_0 = (v_{\text{к}} + v_{\text{т}})\tau$.

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени t_1:

$$(v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(t_1 - 2\tau) = ut_1,$$

откуда $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ. Условие этой встречи:

$$(v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(6\tau - 2\tau) = x_0 - (v_{\text{т}} - u)6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_{\text{к}}}{v_{\text{т}}} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$u\tau_0 = x_0 - (v_{\text{т}} - u)\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau \frac{v_{\text{к}} + v_{\text{т}}}{v_{\text{т}}} = \frac{8}{3}\tau.$$

4 метод (аналитический в СО реки):

Запишем уравнения движения тел в СО реки:

$$\begin{cases} x_{\text{п}} = 0 \\ x_{\text{к}} = v_{\text{к}}t, \text{при } t \in [0{,}2\tau] \\ x_{\text{к}} = v_{\text{к}}2\tau - v_{\text{к}}(t - 2\tau), \text{при } t > 2\tau \\ x_{\text{т}} = x_0 - v_{\text{т}}t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени τ:

$$x_0 - v_\text{т}\tau = v_\text{к}\tau,$$

откуда $x_0 = (v_\text{к} + v_\text{т})\tau$.

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени t_1:

$$v_\text{к}2\tau - v_\text{к}(t_1 - 2\tau) = 0,$$

откуда $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени 6τ. Условие этой встречи:

$$v_\text{к}2\tau - v_\text{к}(6\tau - 2\tau) = x_0 - v_\text{т}6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_\text{к}}{v_\text{т}} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$0 = x_0 - v_\text{т}\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau\frac{v_\text{к} + v_\text{т}}{v_\text{т}} = \frac{8}{3}\tau$$

Задача №8-Т2. Два автомобиля

Правило моментов относительно точки B после въезда первого автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt)$$

Следовательно

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{vt}{L} \qquad (1)$$

Правило моментов относительно точки B после въезда второго автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt) + mgv(t - \Delta t)$$

Откуда

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{v\Delta t}{L} \qquad (2)$$

Правило моментов относительно точки B после съезда первого автомобиля с моста:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mgv(t - \Delta t)$$

То есть

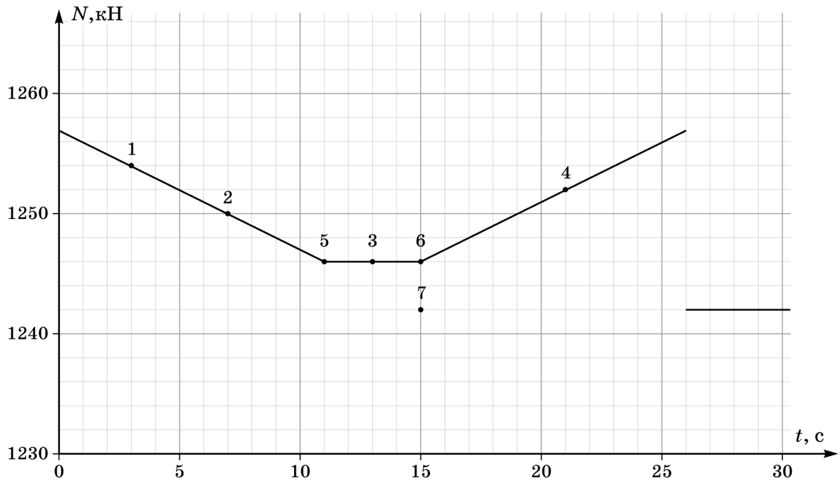
$$N = \frac{1}{2}Mg - mg\frac{v\Delta t}{L} + mg\frac{vt}{L} \qquad (3)$$

После того, как второй автомобиль съедет с моста

$$N = \frac{1}{2}Mg \qquad (4)$$

С учетом полученных выражений график зависимости $N(t)$ состоит из 4 линейных участков: первый — убывающий, с угловым коэффициентом $-\frac{mgv}{L}$; второй — горизонтальный (N в (2) не зависит от времени); третий — возрастающий, с угловым коэффициентом $\frac{mgv}{L}$; и четвертый — горизонтальный ($N = \frac{1}{2}Mg$). Заметим, что угловые коэффициенты на первом и третьем отрезке одинаковы по величине, но противоположны по знаку. То есть эти отрезки симметричны.

Анализируя точки на исходном графике, не сложно прийти к выводу, что точки 1 и 2 относятся к первому отрезку, точка 3 – ко второму, а 4 – к третьему. При стабильной связи график выглядел бы так:



Каждый из автомобилей проводит на мосту 15 секунд (точка 6 – момент съезда первого автомобиля). А значит длина моста $L = vt_6 = 75$ м.

Время между въездами машин на мост – $\Delta t = 11$ с (начало горизонтального отрезка).

Точка 7, в которую первая прямая пришла бы к 15-й секунде, дает возможность определить массу моста $M = 248{,}4$ т.

Разность начального значения силы реакции опоры с N_7 дает возможность определить массу автомобиля $m = 1{,}5$ т.

Задача №8-Т3. Сообщающиеся сосуды

Плотность ρ_2 находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 gh + \rho_1 g(\frac{3}{2}H - h) = \rho_1 gH$$

$\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравняются и станут равны $\frac{5H}{4}$, т.е. в левом сосуде уровень опустится на $\frac{H}{4}$, а в правом поднимется на $\frac{H}{4}$. Следует, также, иметь в виду, что согласно условию h всегда больше $\frac{H}{2}$ ($h > \frac{H}{2}$).

В зависимости от величины h в задаче возможны 2 случая.

1. $h < H$, нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gh + \rho_1 g(\frac{5H}{4} - h) = \rho_1 g\frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 \ - \rho_2)hS \ = \rho_1 \frac{H}{2}S$$

2. В случае $\frac{5H}{4} > h > H$ нижний уровень жидкости с плотностью ρ_2 в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как $\rho_2 < \rho_1$. Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью ρ_1 в левом сосуде доходит до уровня $\frac{H}{4}$, а столб жидкости с плотностью ρ_2 имеет высоту H. Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$.

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gH + \rho_1 g\frac{H}{4} = \rho_1 g(\frac{9H}{4} - h) + \rho_2 g(h - H)$$

или

$$m = \rho_1(2H - h)S + \rho_2(h - 2H)S = \rho_1\frac{H(2H - h)}{2h}S$$

Задача №8-Т4. Нагреватель

Пусть P – мощность водонагревателя, τ – время, в течение которого вода находится в нагревателе, тогда количество теплоты, переданное нагревателем за это время воде, равно

$$Q_1 = P\tau$$

Суммарное количество теплоты, полученное водой за время нахождения в нагревателе:

$$Q_2 = cm(t_г – t_н)$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\tau = cm(t_г – t_н)$$

Так как масса воды равна $m = \rho V = \rho\mu\tau$, где V – объём нагревателя, то

$$P\tau = c\rho V(t_г – t_н)$$

$$P = c\rho\mu(t_г – t_н)$$

На графике можем выбрать точки с координатами, которые «хорошо» определяются $t_{г1} = 45\ °\mathrm{C}, \mu_1 = 2\ \frac{л}{мин} = \frac{2}{60}\frac{л}{с}$ и $t_{г2} = 20\ °\mathrm{C}, \mu_2 = 7\ \frac{л}{мин} = \frac{7}{60}\frac{л}{с}$ Тогда

$$\begin{cases} P = c\rho\mu_1(t_{г1} – t_н) \\ P = c\rho\mu_2(t_{г2} – t_н) \end{cases}$$

Из системы получим

$$t_н = \frac{\mu_2 t_{г2} - \mu_1 t_{г1}}{\mu_2 - \mu_1} = 10\ \ °\mathrm{C}$$

$$P = 4200 \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}002}{60} \cdot (45 - 10) = 4{,}9\ кВт$$

Объемный расход, при котором температура нагретой воды будет равна 100 °C, равен

$$\mu_1 = \frac{4900}{4200 \cdot 1000 \cdot 90} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\frac{м^3}{с} = 0{,}78\frac{л}{мин}$$

.