

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
ПО МАТЕМАТИКЕ  
2023–2024 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 11 классов

*Уважаемый участник Олимпиады!*

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п. (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

**Максимальная оценка — 42 балла.**

**Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.**

*Желаем вам успеха!*

**11.1.** До повышения цен чай с двумя пряниками стоил 100 рублей. Когда все цены выросли (на одинаковое число процентов) 100 рублей стало хватать ровно на чай и один пряник. Потом цены опять выросли на столько же процентов, как и в первый раз. Хватит ли после этого 100 рублей хотя бы на чай?

**11.2.** Можно ли раскрасить плоскость в два цвета, красный и белый, так, чтобы на любой окружности радиуса 1 см было ровно четыре красные точки? Ответ обоснуйте.

**11.3.** Действительные числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенству

$$\left(x + \sqrt{x^2 + 2023}\right) \cdot \left(y + \sqrt{y^2 + 2023}\right) = 2023.$$

Чему равно  $x + y$ ? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

**11.4.** В комнате 8 девочек и несколько мальчиков. Каждая девочка вручила булочку каждому знакомому мальчику. Каждый мальчик вручил по две булочки каждой незнакомой девочке. Каково максимально возможное количество мальчиков, если знакомства взаимные, а всего было роздано 100 булочек?

**11.5.** Докажите, что ровно одно из двух неравенств

$$\sin x + \sin y - \sin(x + y) \leq 1,5 \quad \text{и} \quad \cos x + \cos y - \cos(x + y) \leq 1,5$$

выполнено при любых действительных числах  $x$  и  $y$ . Какое именно? Ответ обоснуйте.

**11.6.** В тетраэдре  $ABCD$  рёбра  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны; это же справедливо для рёбер  $AD$  и  $BC$ . Найдите длину ребра  $AD$ , если  $AB = 10$ ,  $BC = 11$ ,  $CD = 5$ . Ответ обоснуйте.