Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2023 – 2024 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году
9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. *Вычислите*

$$\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\ldots+\frac{298+299}{300}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}\right).$$

Решение:

Способ 1.

$$\frac{1+2}{3}+\frac{4+5}{6}+\ldots+\frac{298+299}{300}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}\right)=$$
$$=\left(\frac{1+2}{3}+1\right)+\left(\frac{4+5}{6}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{7+8}{9}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{298+299}{300}+\frac{1}{100}\right).$$

Выражение в каждой из скобок имеет вид

$$\frac{(3n-1)+(3n-2)}{3n}+\frac{1}{n}$$

и очевидным преобразованием приводится к числу 2. Таким образом, всё выражение представляет собой сумму двоек в количестве 100 штук. Эта сумма равна 200.

Способ 2. Выражение имеет вид

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(3i-2)+(3i-1)}{3i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i},$$

где $n=100$. По индукции покажем, что $a_n=2n$. Действительно, база индукции:

$$a_1=\frac{2\cdot 1-1}{1}+1=2\cdot 1,$$

Индукционный переход: пусть для некоторого $k\in\mathbf{N}$ выполнено $a_k=2k$. Так как

$$a_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2i-1}{i}+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i-1}{i}+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{2(k+1)-1}{k+1}+\frac{1}{k+1}=a_k+2,$$

имеем $a_{k+1}=2k+2=2(k+1)$. Утверждение по индукции доказано, поэтому $a_{100}=2\cdot 100=200$.

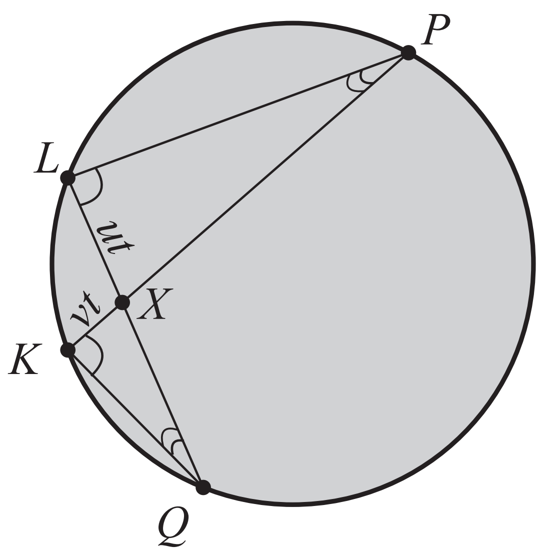
Ответ: 200.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка (возможно, приведшая к неверному ответу)	6 баллов
Попытка применить метод математической индукции, не приведшая к решению	2 балла
Рассмотрены несколько первых членов последовательности a_n (см. способ 2 решения) и на их основе получен, но не доказан верный ответ	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

9.2. *На берегу круглого озера четыре пристани K, L, P, Q. Ровно в 10 утра от пристани K отплывает катер, от L — лодка. Если катер поплывет прямо в P, а лодка прямо в Q, то они столкнутся в некоторой точке X озера. Докажите, что если катер поплывет в Q, а лодка — в P, то они достигнут этих пристаней одновременно. (Скорости лодки и катера постоянны.)*

Решение: Отрезки KP и LQ пересекаются в точке X — месте столкновения катера с лодкой. Значит, мы имеем вписанный в окружность четырёхугольник $KLPQ$, а точка X — точка пересечения диагоналей этого четырёхугольника. Если обозначить скорость лодки через u, катера — через v, а время, прошедшее с момента старта плавсредств до их столкновения, за t, то $KX = vt$, а $LX = ut$ — см. рисунок.



К решению задачи 9.2

Треугольники KXQ и LXP подобны по двум углам: $\angle XLP = \angle XKQ$ как вписанные, опирающиеся на дугу PQ, и $\angle XPL = \angle XQK$ по аналогичной причине. Тогда

$$\frac{LP}{KQ} = \frac{LX}{KX} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v}.$$

Это означает, что длины отрезков LP и KQ пропорциональны скоростям лодки и катера соответственно, поэтому будут пройдены указанными видами транспорта за одинаковое время. Доказательство завершено.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Доказано подобие треугольников KXQ и LXP	5 баллов
Доказано подобие треугольников KXL и PXQ (но не треугольников KXQ и LXP)	3 балла
Задача сведена к доказательству равенства $\frac{KQ}{LP} = \frac{KX}{LX}$	2 балла
Рассуждения и выкладки, из которых ход доказательства не просматривается	0 баллов

9.3. *В колоде шулера Вистуза дам, как и положено, четыре. А вот карт других достоинств может быть разное количество. Вистуз так сложил свою колоду, что в ней между любыми двумя тузами встречается хотя бы один король, между любыми двумя королями — хотя бы одна дама, между любыми двумя дамами — хотя бы один валет, а между любыми двумя валетами — хотя бы один туз. Какое наибольшее и наименьшее количество тузов может быть в колоде Вистуза? Ответ обоснуйте.*

Решение: Оценим наибольшее и наименьшее количество тузов в колоде Вистуза. В колоде есть 4 дамы; между ними три промежутка и в каждом хотя бы один валет. Значит, валетов, как минимум 3. Между первым и вторым валетом есть туз, между вторым и третьим — тоже. Итак, два туза в колоде Вистуза точно есть.

С другой стороны, 4 дамы делят колоду на пять частей: до первой дамы, между первой и второй, между второй и третьей, между третьей и четвёртой и после четвёртой. В каждой части не более одного короля, иначе между королями, лежащими в одной части, не найдётся дамы. Тогда в колоде не более пяти королей. Проведя аналогичные рассуждения с королями, получим, что тузов не больше 6.

Осталось привести примеры, показывающие, что числа 2 и 6 достижимы. Мы укажем только порядок карт, о которых идёт речь в задаче: валетов (В), дам (Д), королей (К) и тузов (Т), так как карты остальных достоинств не важны. Вот эти примеры:

Для случая двух тузов:

Д — В — Д — Т — К — В — Т — Д — В — Д.

Для случая шести тузов:

Т — К — Д — В — Т — К — Д — В — Т — К — Д — В — Т — К — Д — Т — К — Т.

Ответ: Минимальное число тузов в колоде Вистуза — 2, максимальное — 6.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказаны два утверждения: а) в колоде Вистуза не менее двух тузов; б) в колоде Вистуза не более 6 тузов и из двух подтверждающих оценки примеров приведён только один	5 баллов
Доказаны оба утверждения: «а» и «б» (см. критерий на 5 баллов), подтверждающих примеров нет ИЛИ доказано одно из них, и приведён подтверждающий эту оценку пример	4 балла
Доказано одно из двух утверждений «а» или «б» (см. критерий на 5 баллов), подтверждающих примеров нет	3 балла
Приведены два примера колоды (достаточно только карт старше десятки), показывающие, что возможны ровно 2 туза и ровно 6 тузов	2 балла
Приведён один пример колоды (достаточно только карт старше, десятки) показывающий, что возможны ровно 2 туза (или ровно 6 тузов)	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

9.4. *В каждой клетке таблицы* 3×3 *записано число, причем произведение всех чисел в каждой строке и в каждом столбце равно* 1*, а произведение чисел в каждом квадрате* 2×2 *равно* 2*. Найдите все такие таблицы. Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Обозначим числа (слева направо) первой строки: a, b, c, второй: d, e, f, третьей: g, h, i. Имеем

$$abc = def = 1 \Rightarrow abcdef = 1.$$

Но

$$abde = 2 \Rightarrow cf = \frac{1}{2}.$$

Так как $cfi = 1$, получаем, что $i = 2$. Аналогично $a = 2$, $c = 2$ и $g = 2$. Отсюда $b = d = f = h = \dfrac{1}{4}$ и $e = 16$.

Способ 2. Всего в таблице 4 квадрата 2×2; произведение чисел в каждом из них равно 2. Перемножим эти четыре произведения, получим число 16. Заметим, что мы перемножили 16 чисел квадрата, при этом число, стоящее в центре, учли 4 раза, числа, стоящие в углах — по разу, остальные 4 числа — по два раза. С другой стороны, перемножим следующие произведения (каждое из них равно 1): чисел первой строки, чисел второй строки (2 раза), чисел третьей строки и чисел второго столбца. Получим такое же произведение, как и в первом случае, только центральное число учтено три раза, а не четыре. Значит, отношение двух полученных произведений в точности равно среднему числу, а это отношение равно 16. Итак, среднее число квадрата 16.

Обозначим число, стоящее в левом верхнем углу таблицы буквой a, число, стоящее в строке рядом с ним — буквой b. Будем последовательно заполнять таблицу, соблюдая условия задачи — см. рисунок:

a	b	$\frac{1}{ab}$
$\frac{1}{8ab}$	16	$\frac{1}{2ab}$
		2

К решению задачи 9.4

Так как произведение чисел в верхней строке равно 1, в правом верхнем углу таблицы стоит число $\dfrac{1}{ab}$. А так как квадрат 2×2, содержащий левую верхнюю клетку состоит из чисел, произведение которых 2, во второй строке слева стоит число $\dfrac{1}{8ab}$. Произведение чисел второй строки равно 1, поэтому во второй строке справа должно стоять число $\dfrac{1}{2ab}$. Из последнего столбца получаем, что в правом нижнем углу таблицы стоит число 2. Аналогичные рассуждения можно провести, начиная с любого угла таблицы, поэтому число 2 стоит во всех угловых клетках ($a = 2$). Из верхней и нижней строк, левого и правого столбца, получим, что остальные числа равны $\dfrac{1}{4}$ каждая.

Ответ: Единственно возможная таблица такова:

2	1/4	2
1/4	16	1/4
2	1/4	2

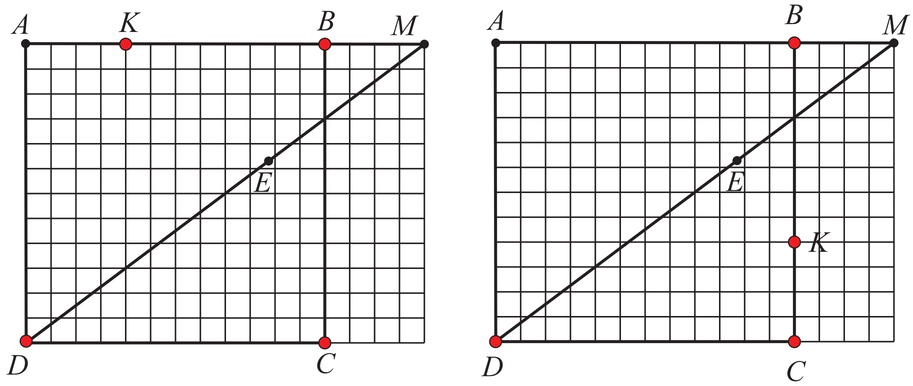
ответ к задаче 9.4

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	снять 1 балл за каждую
Верно и обосновано найдены некоторые (не все) числа таблицы и приведена верная таблица	4 балла
Верно и обосновано найдены некоторые (не все) числа таблицы, а сама таблица не найдена	3 балла
Приведён верный пример таблицы; его единственность не доказана	2 балла
Задача верно сведена к системе уравнений, решение которой неверно или отсутствует	1 балл
Неверные примеры таблицы	0 баллов

9.5. *Придумайте, как разрезать контур квадрата со стороной* 12 *см из тонкой проволоки ровно на* 4 *части и сложить из полученных кусочков контур треугольника с тем же периметром. Сгибать и разгибать части нельзя.*

Решение: Существует ровно два способа разрезания, приведенные на рисунке ниже (красные точки — точки разреза контура), при этом составляемый треугольник один и тот же. Проще всего увидеть построение на листе клетчатой бумаги со стороной клетки 1 см.



К решению задачи 9.5

Легко проверить, что в обоих случаях длина

$$MD = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 = 8 + 12 = KB + DC,$$

что доказывает корректность построения.

Примечание: Доказательство того, что по-иному провести разрезание нельзя, мы не приводим. От участника олимпиады оно тоже не требуется.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведено верное разрезание и доказано, что из получившихся кусочков треугольник складывается	7 баллов
Приведено верное разрезание (в частности, указано, что одна из сторон контура делится в отношении 1:3), но не обосновано, что треугольник может быть сложен	5 баллов
Доказано, что ровно три точки разреза совпадают с углами квадрата (или что полученный треугольник обязательно прямоугольный)	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

9.6. *Числа x и y не являются целыми, но числа $5x-3y$ и $13x+2y$ — целые. Каким наименьшим числом может быть дробная часть числа x? (Напомним, что дробной частью числа x называется разность $x-[x]$, где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.) Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Напомним, что дробная часть числа x обозначается, как $\{x\}$ и что всегда $0 \leqslant \{x\} < 1$. Пусть $5x-3y=a$ и $13x+2y=b$. Тогда, решая систему относительно x и y, получим

$$x=\frac{2a+3b}{49}, \quad y=\frac{-13a+5b}{49}.$$

Так числа b и a — целые, то $\{x\} \geqslant \frac{1}{49}$. При этом равенство $\{x\}=\frac{1}{49}$ достигается, например при $a=2$, $b=-1$. Соответствующие им x и y равны $\frac{1}{49}$ и $-\frac{31}{49}$.

Способ 2. Целыми являются также числа $(5x-3y)+(13x+2y)=18x-y$ и $(5x-3y)-3(18x-y)=-49x$. Значит, x — обыкновенная дробь со знаменателем (если считать дробь несократимой), равным одному из делителей числа 49. Следовательно, наименьшая ненулевая дробная часть числа равна $\frac{1}{49}$. Положим, например, $x=\frac{1}{49}$. В качестве y годится любое такое число, чтобы $18x-y$ было целым, например, подойдёт $y=\frac{18}{49}$.

Ответ: $\frac{1}{49}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что $\{x\} \geqslant 1/49$; верного примера нет	4 балла
Приведён пример удовлетворяющих условию чисел x и y таких, что $\{x\} = 1/49$	2 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов