Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году
8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. *Первыми двумя словами Вовочки были «мама» и «папа». С того дня, когда он их произнес, он начал учить слова, причем каждый день выучивал одинаковое количество разных слов. К концу своего дня рождения Вовочка выучил уже* 1000 *новых слов (помимо первых двух, упомянутых выше). Известно, что в начале первого дня того же месяца он знал* 822 *слова, а к концу последнего дня этого месяца —* 1102 *слова. Какого числа и в каком месяце у Вовочки день рождения? Ответ обоснуйте.*

Решение: За тот месяц, в котором у Вовочки день рождения, он всего выучил $1102 - 822 = 280$ слов. Так как он каждый день пополнял свой лексикон на одно и то же количество слов, число 280 должно без остатка делиться на количество дней в месяце, то есть на 31, на 30, на 28 или на 29 (если этот месяц — февраль високосного года). Но число 280 не делится ни на 31, ни на 30, ни на 29, а только на 28. Значит, месяц рождения Вовочки — февраль, а количество слов, которые Вовочка выучивал каждый день, равно 10. С начала месяца до вечера своего дня рождения Вовочка выучил $1000 + 2 - 822 = 180$ новых слов. На это у него ушло $180 : 10 = 18$ дней. Значит, Вовочка родился 18 февраля.

Ответ: 18 февраля — день рождения Вовочки.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Доказано, что Вовочка учил по 10 слов в день ИЛИ доказано, что месяц рождения Вовочки 28-дневный	3 балла
Верно найдено число слов, которое Вовочка выучил за месяц	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.2. *Существуют ли нецелые числа x и y, чтобы оба числа $5x + 7y$ и $7x + 10y$ были целыми? Ответ обоснуйте.*

Решение:

<u>Способ 1.</u> Пусть $5x+7y=a$ и $7x+10y=b$. Тогда, решая систему относительно x и y, получим $x=10a-7b$, $y=5b-7a$. Если числа b и a — целые, то целыми будут и числа x, y.

<u>Способ 2.</u> Предположим, что для некоторых нецелых чисел x и y оба числа $5x+7y$ и $7x+10y$ — целые. Тогда целыми также будут следующие числа:

$$\begin{gathered}(7x+10y)-(5x+7y)=2x+3y,\\(5x+7y)-(2x+3y)=3x+4y,\\(3x+4y)-(2x+3y)=x+y,\\(2x+3y)-2(x+y)=y,\\3(x+y)-(2x+3y)=x,\end{gathered}$$

и оба числа x и y — целые. Противоречие.

Ответ: Не существуют.

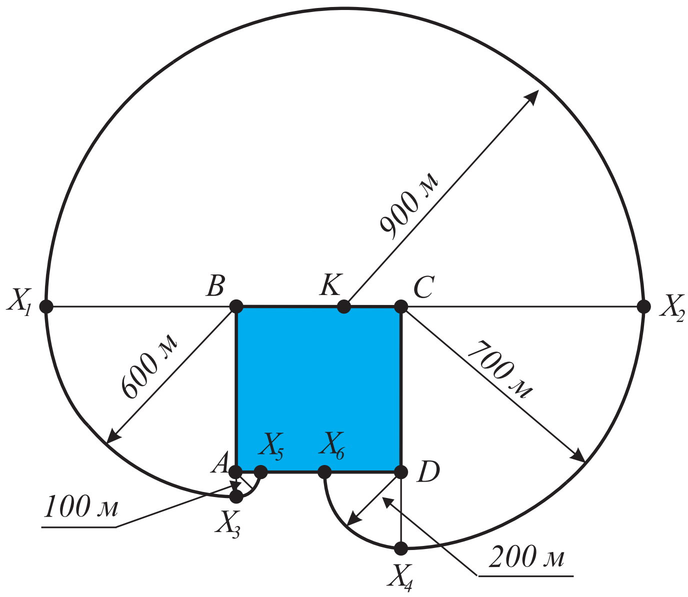
<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Хотя бы одно из чисел x или y представлено в виде линейной комбинации чисел $5x+7y$ и $7x+10y$ (с целыми коэффициентами)	5 баллов
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием, в том числе иллюстрация несуществования требуемой пары $(x;\, y)$ примерами	0 баллов

8.3. *Квадратный пруд имеет сторону* 500 *метров. На одной из его сторон выбрана точка* K*, отстоящая от одного угла на* 200 *метров, а от другого — на* 300 *метров. Укажите на плоскости все точки* X*, до которых можно дойти из точки* K*, пройдя не более* 900 *метров по суше.*

Решение: Пусть пруд — это квадрат $ABCD$ ($AB=500$ м), выбранная точка K лежит на стороне BC в двухстах метров от точки C и в трёхстах — от точки B, см. рисунок Прежде всего рассмотрим полуплоскость с границей BC, которая не содержит пруда. Расстояние от любой её точки X до точки K — отрезок XK. Условие $XK \leqslant 900$ означает, что точка X лежит в круге с центром в точке K радиуса 900. В пересечении с рассматриваемой полуплоскостью получаем полукруг с тем же центром и того же радиуса — на рисунке это полукруг с диаметром X_1X_2.

Теперь рассмотрим угол, образованный пересечением не содержащей пруда полуплоскости с границей AB и полуплоскостью с границей BC, содержащей пруд. Легко видеть, что кратчайший путь от любой точки X указанного множества до точки K — ломаная XBK (обходить пруд со стороны точки C — дальше). Её



К решению задачи 8.3

длина равна $XB + BK = XB + 300$. Значит, точка X достижима, если она лежит в круге с центром в точке B радиуса 600 м. В пересечении с рассматриваемым множеством получим сектор этого круга с углом 90°; X_1X_3 — дуга этого сектора.

Аналогично рассматриваются точки, лежащие внутри угла, образованного пересечением не содержащей пруда полуплоскости с границей CD и полуплоскостью с границей BC, содержащей пруд. Получается четверть круга с центром в точке C радиуса 700 м; X_2X_4 — дуга этого сектора.

Осталось рассмотреть точки полосы с границами AB и CD, точнее, той её части, которая от точки K отделена прудом. От любой точки X этой части до точки K можно добраться двумя принципиально разными способами: обходя пруд со стороны AB или обходя пруд со стороны CD. В первом случае получим трёхзвенную ломаную $XABK$, во втором — $XDCK$. Путь по первой ломаной равен $XA + 500 + 300$ и он не больше 900 м тогда и только тогда, когда $XA \leqslant 100$, то есть X должна лежать в круге радиуса 100 м с центром в точке A. Аналогичное рассмотрение второго пути показывает, что точка X должна лежать внутри круга радиуса 200 м с центром в точке D. Пересекая эти круги с рассматриваемой полосой, получаем ещё секторы двух кругов, ограниченные дугами X_3X_5 и X_4X_6 соответственно.

Объединение указанных областей — одного полукруга и четырёх секторов других кругов и есть искомое множество. Его замкнутая граница склеена из дуг окружностей и береговых отрезков — такая кривая в математике носит название «сплайн». На рисунке она выделена жирной линией.

Ответ: внутренняя часть плоскости, ограниченная пятью дугами окружностей и границей пруда — см. рисунок выше.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Множество точек X указано верно; доказано одно из двух: а) до любой точки множества X можно дойти, пройдя не более 900 м, б) до любой другой точки плоскости идти больше 900 м	6 баллов
Множество точек X указано верно; обоснование, что оно искомое, отсутствует	4 балла
Верно найдено (с обоснованием) множество точек X, лежащих хотя бы в двух полуплоскостях, граница которых проходит по сторонам пруда	3 балла
Верно найдено (с обоснованием) множество точек X, лежащих хотя бы в одной из полуплоскостей, граница которой проходит по стороне пруда	2 балла
Рассуждения, не приведшие к ответу	0 баллов

8.4. *Таёжный турпоход длился* 11 *дней. Каждый день ровно* 10 *процентов туристов кормили комаров. Интересно, что для любых двух последовательных дней более одного процента туристов кормили комаров в оба эти дня. Обязательно ли найдется турист, ни разу не кормивший комаров за время похода?*

Решение: В турпоходе было $10n$ человек, где n — число натуральное (иначе 10% от количества туристов будет не целым числом). В первый день похода комаров покормило n человек, во второй — тоже n, но так как среди них было пересечение более, чем в $0{,}1n$ человека, к числу кормивших комаров добавилось меньше, чем $(1-0{,}1)\cdot n = 0{,}9n$ человек. В третий день опять кормило комаров n туристов, по крайней мере $0{,}1n$ из них кормило комаров и во второй день, поэтому новых кормящих будет меньше $0{,}9n$. Такая же ситуация со всеми днями вплоть до 11-го. Всего комаров покормят строго меньше, чем $n+10(0{,}9n) = 10n$ туристов, то есть обязательно найдутся туристы, комаров ни разу не кормившие.

Ответ: обязательно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верно рассмотрены случаи конкретного числа туристов	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.5. *Существуют ли шесть попарно различных натуральных чисел a, b, c, d, e и f таких, что*

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}} = 2023\ ?$$

Решение: Переобозначив переменные ($a = a_1$, $b = a_2$ и т. д.), условие перепишем в виде

$$\sum_{i=1}^{6}\left(a_i - \frac{2023}{a_i}\right) = 0.$$

Заметим, что если $a_i \cdot a_j = 2023$, то

$$\left(a_i - \frac{2023}{a_i}\right) + \left(a_j - \frac{2023}{a_j}\right) = (a_i - a_j) + (a_j - a_i) = 0,$$

поэтому достаточно найти три пары натуральных чисел, произведение которых равно 2023. Так как $2023 = 1 \cdot 7 \cdot 289 = 1 \cdot 7 \cdot 17^2$, то годится набор $a = 1$, $b = 7$, $c = 17$, $d = 7 \cdot 17 = 119$, $e = 17^2 = 289$, $f = 2023$.

Ответ: Существуют.

Примечание: В приведённом решении рассматриваются только шестёрки чисел, которые можно разбить на пары так, что произведение чисел в каждой паре равно 2023. Такая шестёрка, как легко видеть из разложения числа 2023 на простые множители, единственна. При этом возможно, что есть и другие решения, не связанные с разбиением чисел на пары.

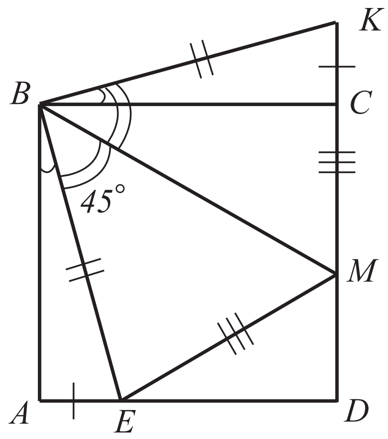
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верно приведена шестёрка чисел, удовлетворяющих условию	7 баллов
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.6. *На стороне AD квадрата $ABCD$ произвольно взята точка E, не совпадающая с точками A и D. Точка M стороны CD такова, что $\angle EBM = 45°$. Известно, что сторона квадрата равна* 1*. Докажите, что периметр треугольника EMD равен* 2*.*

Решение:

Способ 1. Дополнительное построение: на продолжении стороны DC за точку C отметим точку K так, чтобы $CK = AE$ (см. следующий рисунок).



К решению задачи 8.6, способ 1

Треугольники BCK и BAE равны по двум катетам, поэтому имеем, во-первых, $BE = BK$, и, во-вторых, $\angle ABE = \angle KBC$. Тогда

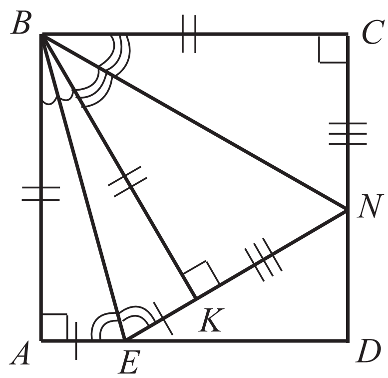
$$\angle MBK = \angle MBC + \angle CBK = \angle MBC + \angle ABE = 90^\circ - \angle EBM = \\ = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle EBM.$$

Треугольники MBK и MBE, следовательно равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $MK = ME$, и тогда найдём периметр треугольника EMD (обозначение P_{EMD}):

$$P_{EMD} = ED + DM + ME = ED + DM + MK = ED + DM + MC + CK = \\ = ED + DC + AE = AD + DC = 2,$$

что и требовалось доказать.

<u>Способ 2.</u> Дополнительное построение: проведём луч EN (точка N лежит на прямой DC) так, чтобы $\angle BEA = \angle BEN$. Из точки B опустим на этот луч перпендикуляр BK (см. следующий рисунок).



К решению задачи 8.6, способ 2

Треугольники BAE и BKE прямоугольные с общей гипотенузой и равными острыми углами, значит, они равны. Значит, $AE = EK$ и $BK = BA = BC$. Тогда треугольники BNK и BCN равны, как прямоугольные с общей гипотенузой и равными катетами. Отсюда $NC = NK$, а тогда $EN = EK + KN = AE + NC$ и

$$P_{END} = NE + ED + DN = AE + ED + DN + NC = AD + DC = 2.$$

Остаётся показать, что точки M и N совпадают. Действительно, из равенства треугольников BAE и BKE следует равенство углов $\angle ABE$ и $\angle KBE$, а из равенства треугольников BNK и BCK — равенство $\angle KBN = \angle CBN$. Значит $\angle EBN$ составляет половину угла $\angle B$, то есть равен $45°$. Значит, луч BN совпадает с лучом BM, а точка N — с точкой M.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов