Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

7 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. *В выражении*

$$\frac{1}{2}\star\frac{2}{3}\star\frac{3}{4}\star\ldots\star\frac{99}{100}$$

замените звездочки на знаки четырёх арифметических действий («+», «−», «·» или «:»), чтобы значение полученного выражения стало равным 0. Скобки использовать нельзя.

Решение: Существует несколько способов решения задачи. Например:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}-\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{12}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}=0;$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{24}{25}+\frac{25}{26}\cdot\frac{26}{27}\cdot\ldots\frac{49}{50}-\frac{50}{51}\cdot\frac{51}{52}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{5}{25}+\frac{25}{50}-\frac{50}{100}=0.$$

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведена хотя бы одна верная замена звёздочек и показано, почему значение полученного выражения равно 0	7 баллов
Приведена верная замена звёздочек, но не очевидно и не обосновано, что полученное при этом выражение равно 0	6 баллов
Замена звёздочек привела к выражению, не равному 0	0 баллов

7.2. *В детском саду есть большая коробка с шариками трех цветов: красного, синего и зелёного. Всего в коробке 100 шариков. Однажды Валера достал из коробки 30 красных, 10 синих и 20 зелёных шариков, поиграл с ними, пять шариков потерял, а остальные вернул обратно в коробку. На следующий день Серёжа достал из коробки 8 красных, 18 синих и 48 зеленых шариков. Можно ли утверждать, что хотя бы один потерянный Валерой шарик был красный? Ответ обоснуйте.*

Решение: Красных шариков в коробке было не меньше 30 (Валера же достал 30 штук!). Серёжа оставил в коробке $100-5-18-8-48=21$ шарик. Даже если все они красные, то всего красных шаров (вместе с вытащенными Серёжей) будет 29. Значит, один красный шарик точно потерян.

Ответ: да, можно утверждать.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Отмечен один из двух фактов: а) красных шариков было не меньше 30; б) Серёжа оставил в коробке 21 шарик	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием или ответ проиллюстрирован конкретными примерами	0 баллов

7.3. *По окружности написали несколько чисел (их больше* 10*). Среди всех произведений соседних чисел ровно пять отрицательных. Докажите, что хотя бы одно из чисел равно нулю.*

Решение: Предположим противное, то есть предположим, что все написанные на окружности числа ненулевые. Все числа разбиваются на группы последовательных чисел одного знака, и отрицательные произведения соседних чисел возникают в точности на границах между группами. Заметим, что, если идти по часовой стрелке, то переходы от отрицательной группы к положительной и от положительной группы к отрицательной чередуются. Значит, всего переходов чётное число. Соответственно, нечётных произведений тоже чётное количество. Но по условию задачи их 5. Противоречие. Значит, хотя бы одно из записанных на окружности чисел равно нулю.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Доказано, что пар соседних чисел, в которых ровно одно число отрицательное (или ровно одно число положительное), чётное количество	5 баллов
Замечено, но не доказано, что в случае отсутствия нулей переходов от отрицательных чисел к положительным столько же, сколько переходов от положительных чисел к отрицательным	2 балла
Рассматриваются группы последовательных чисел одного знака	1 балл
Утверждение проиллюстрировано конкретными примерами	0 баллов

7.4. *Женя и Вадик разделили одно и то же натуральное число с остатком на 12 и 13 соответственно. Сумма неполного частного, полученного Женей и остатка, полученного Вадиком, равна 14. Чему равен остаток, полученный Женей? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть Женя и Вадик делили число N. Тогда $N = 12a+b$, и $N = 13c+d$, где a и c — неполные частные, а b и d — остатки при делении числа N на 12 и 13 соответственно. Тогда $0 \leqslant b \leqslant 11$, $0 \leqslant d \leqslant 12$. По условию $a + d = 14$. Имеем

$$12a + b = 13c + 14 - a \Leftrightarrow 13(a - c - 1) = 1 - b,$$

поэтому число $b - 1$ кратно 13. Так как b — целое число, и $0 \leqslant b \leqslant 11$, отсюда следует, что $b = 1$.

Ответ: 1.

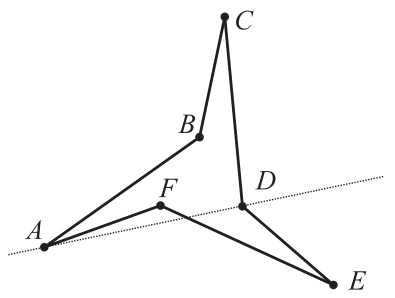
Примечание: Проверяющие не должны требовать, чтобы в решении школьники показывали возможность описанной ситуации, то есть не надо требовать примера или иного доказательства того, что существует натуральное число N, для которого сумма неполного частного при делении на 12 и остатка при делении на 13 равна 14. Но из приведённого решения такие числа легко находятся. Все они имеют вид $12a+1$ и их количество конечно, так как число $14-a = d$, будучи остатком от деления на 13, лежит в отрезке $[0; 12]$. Вот все эти числа: 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97, 109, 121, 133, 145, 157, 169.

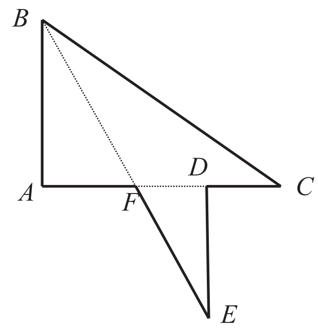
Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Условие задачи верно записано через уравнение (систему уравнений), связывающее неполные частные и остатки, полученные мальчиками	3 балла
Имеется представление числа хотя бы в одном из видов $12a + b$ или $13c + d$	2 балла
Приведены примеры, показывающие, что остаток может равняться 1	1 балл
Ответ без обоснования и/или замечание, что остаток не превосходит 11	0 баллов

7.5. *Постройте шестиугольник на плоскости, который нельзя разрезать одним прямолинейным разрезом на два четырёхугольника, каким бы ни был этот разрез.*

Решение: Два таких шестиугольника (есть и другие) приведены на рисунках ниже.





Примечание: Доказательство того, что приведённый школьником шестиугольник — искомый, от участника олимпиады не требуется. При проверке верности примера достаточно только проверить, что предъявленный шестиугольник $ABCDEF$ не делился на два четырёхугольника разрезами по отрезкам AD, BE и CF. Доказательство этого факта мы не приводим.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный пример шестиугольника	7 баллов
Любые примеры и рассуждения, не приведшие к решению	0 баллов

7.6. 100 *женщин побывали в один и тот же день в универмаге. Известно, что ровно* 70 *женщин купили духи, ровно* 83 *— ту или иную косметику, ровно* 58 *— обувь и ровно* 98 *— что-нибудь из одежды. Какое минимальное количество женщин приобрели все сразу? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Рассмотрим женщин, которые купили НЕ все типы товара. Они делятся на 4 группы: тех, кто не купил духи (30 человек), не купил косметику (17 человек), не купил обувь (42 человека) и не купил одежду (2 человека). Наибольшее количество таких женщин будет в ситуации, когда выделенные группы попарно не пересекаются (все $30 + 17 + 42 + 2 = 91$ женщины различны); такая ситуация, очевидно, возможна. В этом случае будет наименьшее количество женщин, купивших все четыре товара, а именно $100 - 91 = 9$.

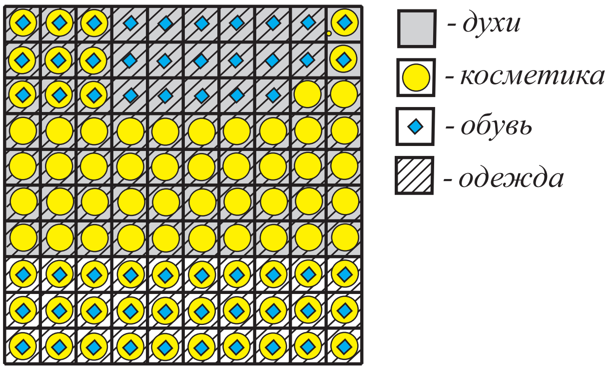
Способ 2. Изобразим покупательниц в виде квадрата 10×10: каждая покупательница — клетка. Каждый вид товара представим в виде узора; если покупательница купила данный товар, то на соответствующую ей клетку нанесём узор купленного товара. Таким образом, каждая клетка может содержать от 0 до 4 разных узоров. Пример, изображённый на рисунке, показывает, что возможна ситуация, когда все виды товаров купят 9 женщин — квадрат 3×3 в левом верхнем углу. Покажем, что меньше 9 таких женщин быть не может. От противного, пусть их меньше 9. Тогда число узоров во всех клетках квадрата не превосходит

$$8 \cdot 4 + (100 - 8) \cdot 3 = 308.$$

Но их на самом деле

$$70 + 83 + 58 + 98 = 309.$$

Противоречие.



К решению задачи 7.6

<u>Способ 3.</u> Рассмотрим женщин, которые не купили духи — их ровно 30. Если все они приобрели косметику, то останется ещё $83 - 30 = 53$ дамы, которые косметику тоже купили. А если не все, то женщин, купивших и косметику, и духи будет ещё больше. Значит, женщин, которые приобрели эти два товара, не менее 53. Аналогично, если из остальных 47 женщин все купят обувь, то тогда останется ещё $58 - 47 = 11$ (если не все, то больше 11) тех, которые приобрели и духи, и косметику, и обувь. Проведя ещё раз аналогичные рассуждения с женщинами, купившими одежду, получим, что хотя бы $98 - (100 - 11) = 9$ женщин приобрели все четыре товара. Из рассуждения выше легко строится пример, когда таких женщин ровно 9: занумеруем женщин числами от 1 до 100, пусть обувь купили дамы с номерами от 1 до 70, косметику — с номерами от 1 до 53 и с номерами от 71 до 100 ($53 + 30 = 83$), а обувь — с номерами от 1 до 11 и с номерами от 54 до 100 ($11 + (100 - 53) = 58$) и обувь — все, кроме номеров 10 и 11 ($100 - 2 = 98$). По сути для каждой следующей покупки отбираем всех женщин, которые не купили какого-либо товара из предыдущих, и дополняем их до нужного количества остальными. В этом случае все четыре товара купят женщины с номерами от 1 до 9.

Примечание: Для получения полного балла школьники должны обосновать точную оценку (то есть показать, что женщин, купивших все типы продукции не меньше 9) и как-то доказать достижимость числа 9.

Ответ: 9 женщин.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что купивших 4 товара женщин больше 9; пример явно не выделен, но легко получается из доказательства	5 баллов
Доказано, что купивших 4 товара женщин больше 9, а пример отсутствует (или неверен)	4 балла
Приведён пример, показывающий достижимость числа 9	3 балла
Приведена формула включений — исключений для 4 типов товара и/или верно изображена схема кругов Эйлера для этого случая	1 балл
Примеры, когда купивших 4 товара женщин больше 9, и/или доказана не точная оценка ($\leqslant 8$)	0 баллов