Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году
6 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

6.1. *Расставьте в клетки таблицы 4×4 числа так, чтобы сумма всех чисел в таблице была больше 35, а сумма всех чисел в любом квадрате 3×3 была меньше 16. Числа не обязаны быть различными.*

Решение: Например, подойдёт такой квадрат, как на рисунке ниже.

3	3	3	3
3	0	0	3
3	0	0	3
3	3	3	3

К решению задачи 6.1

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Пример верной расстановки чисел	7 баллов
Неверные примеры (в любом количестве) и/или рассуждения и выкладки, не приведшие к ответу	0 баллов

6.2. *Математик Валерий Трифонович в силу своей природной лени делает домашнюю работу за 6 часов. Но если он выпьет берёзового сока, то будет работать в два раза быстрее. Валерий Трифонович начал делать работу в 12 : 00. В какой-то момент ему принесли сок. В итоге он закончил домашнюю работу за 4 часа. В какое время ему принесли сок? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Поскольку, приняв сока, Валерий Трифонович работает вдвое быстрее, то он экономит времени столько же, сколько работает под воздействием сока. По условию Валерий Трифонович сэкономил $6 - 4 = 2$ часа, и такое же время прошло после того, как он выпил сок. Значит, с полудня до принятия сока прошло $4 - 2 = 2$ часа, то есть ему принесли сок в 14:00. Можно заметить, что к этому моменту он как раз сделал треть всей домашней работы.

Способ 2. Примем всю работу за 1. Тогда скорость работы (то есть производительность) «ленивого» Валерия Трифоновича равна $1/6$ работы в час. После принятия сока она будет вдвое больше, то есть 1/3 работы в час. Пусть t — время, которое Валерий Трифонович работал до того, как выпил сок. Тогда $4 - t$ — время, которое он работал под воздействием сока. Имеем уравнение

$$\frac{1}{6} \cdot t + \frac{1}{3} \cdot (4 - t) = 1,$$

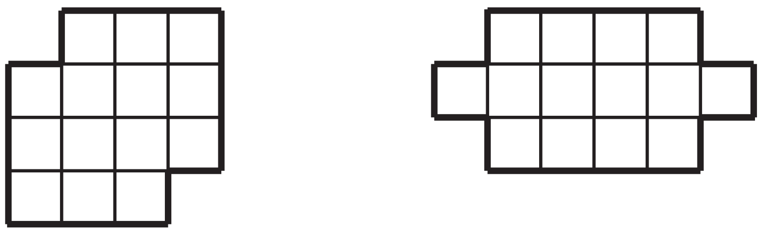
решая которое, получаем $t = 2$. Значит, сок Валерию Трифоновичу был принесён спустя 2 часа после начала работы, то есть в 14:00.

Ответ: в 14:00.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верно и обоснованно определено время (2 часа), которое Валерий Трифонович работал до принятия сока (или наоборот, под воздействием сока), но ответ 14:00 не указан	6 баллов
Показано, что если сок был принесён в 14:00, то условие задачи выполнено, но не обосновано, что другое время принятия сока не удовлетворяет условию	4 балла
Условие задачи верно записано через уравнение, которое не решено или решено неверно	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

6.3. *Из листа клетчатой бумаги вырезаны две такие фигурки:*

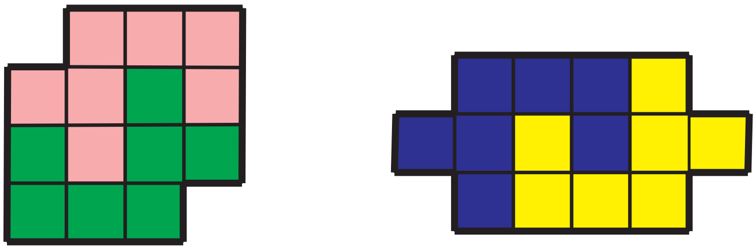


К условию задачи 6.3: фигурка 1 (*слева*); фигурка 2 (*справа*)

Барон Мюнхгаузен пообещал, что разрежет каждую из них (разрезы идут по линиям сетки) на две части, и при этом все четыре получившихся части будут совершенно одинаковыми. Сможет ли барон сдержать своё обещание? Ответ обоснуйте.

Решение: Единственно возможное (с точностью до симметрии) разрезание, удовлетворяющее требованиям задачи, представлено ниже на рисунке.

Ответ: сможет.



К решению задачи 6.3

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведено верное разрезание обеих фигурок	7 баллов
Имеется верное разрезание только одной фигурки	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверные разрезания фигурок (в любом количестве)	0 баллов

6.4. *У математика Сергея Эрнестовича имеется семь старинных монет: четыре одинаковых дублона и три одинаковых динара. Точный вес монет он забыл (что, поделаешь, возраст!), но помнит, что дублон весит 5 или 6 граммов, а динар — 7 или 8 граммов. Сможет ли наш математик узнать точный вес каждой монеты при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь? Ответ обоснуйте.*

Решение: Первым взвешиванием сравниваем вес всех четырёх дублонов и всех трёх динаров. Вес 4 дублонов то ли 20 г, то ли 24 г; вес трёх динаров — то ли 21 г, то ли 24 г. Значит, если весы будут в равновесии, то на обоих чашах по 24 г, то есть дублон весит 6 граммов, а динар — 8. Если чаша с дублонами перевесит, то на ней 24 г (дублон весит 6 г), а на чаше с динарами — 21 г (динар весит 7 г). Наконец, если перевесит чаша с динарами, то дублон весит 5 г, а про вес динара ничего нового мы не узнали.

В этом последнем случае Сергею Эрнестовичу потребуется второе взвешивание. Сравним три дублона и два динара. Три дублона весят 15 г, а два динара — то ли 14, то ли 16 г. Значит, если перевесят дублоны, динар весит 7 г, если динары — 8 г. Во всех случаях точный вес монет установлен.

Примечание: Можно рассматривать только взвешивания, когда на одну чашу весов кладутся исключительно дублоны, а на другую — исключительно динары. При этом дублонов должно быть больше, чем динаров (иначе чаша с динарами обязательно перевесит), но менее, чем в два раза (иначе непременно перевесит чаша с дублонами). Таким образом, два приведённых в решении взвешивания — единственно разумные.

Ответ: сможет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано, как определяется вес дублона (а вес динара определяется не во всех случаях)	4 балла
Приведены оба взвешивания из решения, но не показано как по их результатам найти вес монет	3 балла
Обосновано, что бессмысленно сравнивать веса динаров и дублонов хотя бы в одном из двух случаев: а) если динаров больше, чем дублонов; б) если динаров в два раза меньше, чем дублонов	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

6.5. *На базаре продаются раки, ну очень большие и очень маленькие, но продаются. Сегодня три больших рака и один маленький рак стоят столько же, сколько пять больших раков стоили вчера. А два больших рака и один маленький сегодня стоят столько же, сколько три больших и один маленький, но вчера. Выясните, что дороже: один большой рак и два маленьких сегодня или пять маленьких, но вчера. Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть B и M соответственно — цена большого и малого рака вчера, а b и m — их же цена сегодня. По условию $3b + m = 5B$ и $2b + m = 3B + M$. Докажем, что тогда $b + 2m = 5M$. Для этого надо исключить из отмеченных уравнений переменную B. Из первого уравнения, умножая обе его части на 3, имеем

$$9b + 3m = 15B. \tag{1}$$

Из второго уравнения, умножая обе его части на 5, получим

$$10b + 5m = 15B + 5M. \tag{2}$$

Теперь, подставляя выражение из (1) в (2), получаем

$$b + 2m = 5M.$$

Вывод: один большой рак и два маленьких сегодня стоят столько же, сколько стоили пять маленьких вчера.

Ответ: Стоимости получаются равными.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка, но задача доведена до ответа (возможно, неверного)	5 баллов
Верно выписана система уравнений, описывающая условие задачи, и найдено её решение в частных случаях	4 балла
Верно выписана система уравнений, описывающая условие задачи; дальнейшего продвижения нет	3 балла
Верный ответ получен в дополнительных предположениях, например, в ситуации, когда цены на оба вида раков изменились одинаково	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов