Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. *В кошельке лежит* 26 *монет номиналами* 1, 2 *или* 5 *рублей. Известно, что если вытаскивать из кошелька монеты по одной, не глядя, то среди* 20*-и первых вытащенных окажется, как минимум,* 1 *монета достоинством в один рубль,* 2 *монеты достоинством в два рубля и* 5 *монет достоинством в пять рублей. Сколько денег в кошельке? Ответ обоснуйте.*

Решение: Однорублёвых монет не меньше семи, так как в противном случае может оказаться, что все эти монеты останутся в кошельке после того, как оттуда будут извлечены 20 остальных. Двухрублёвых — не меньше 8 по аналогичным соображениям: будь их меньше, мы бы оставили в кошельке 6 из них, и среди вытащенных монет не найдётся двух достоинством в 2 рубля. Если однорублёвых монет больше 7, или двухрублёвых больше 8, то пятирублёвых меньше, чем $26-7-8=11$. Тогда может случится, что 6 из них остались в кошельке, и извлечёнными оказались остальные, в количестве не больше 4 — противоречие. Значит, в кошельке ровно 7 монет достоинством в один рубль ровно 8 достоинством в 2 рубля и ровно 11 достоинством в 5 рублей. Общая сумма денег в кошельке $7+2\cdot8+5\cdot11=78$ рублей.

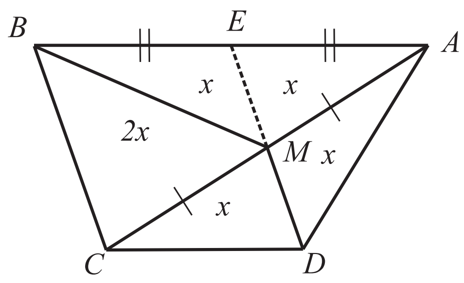
Ответ: 78 рублей.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно приведшие к неверному ответу	−1 балл за каждую
Верно указано число монет в кошельке каждого достоинства: одно-, двух- и пятирублёвых, но не обоснована единственность примера	4 балла
Доказаны два из трёх утверждений: а) однорублёвых монет не меньше семи, б) двухрублёвых монет не меньше 8, в) пятирублёвых монет не меньше 11	2 балла
Доказано хотя бы одно из трёх утверждений а), б) или в) (см. критерий на 2 балла)	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

10.2. *В трапеции $ABCD$ (AB и CD — основания) M — середина диагонали AC, и площади треугольников ABM и ACD равны. Докажите, что прямые DM и BC параллельны.*

Решение: Соединим точку M с вершинами B и D и продолжим отрезок DM до пересечения со стороной AB в некоторой точке E — см. рисунок.



К решению задачи 10.2

Пусть площадь треугольника ACD равна $2x$. Так как медиана делит площадь треугольника пополам, $S_{DMC} = S_{DMA} = x$ и $S_{BMC} = S_{BMA} = 2x$. Треугольники AME и DMC равны по стороне ($AM = MC$) и двум прилежащим к ней углам ($\angle AME = \angle DMC$, как вертикальные; $\angle EAM = \angle MCD$, как внутренние накрест лежащие при параллельных AB и CD и секущей AC). Значит, $S_{AME} = S_{DMC} = x$. Тогда $S_{MBE} = 2x - x = x$, то есть отрезок ME делит треугольник BMA на два треугольника одинаковой площади. Тогда ME — медиана треугольника BMA, точка E — середина отрезка AB, а тогда ME — средняя линия треугольника ABC. Значит, прямая ME (она же — прямая MD) параллельна стороне BC, что и требовалось доказать.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что основание AB в 2 раза больше основания CD	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

10.3. *а) Существует ли функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такая, что для всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$?*

б) Существует ли функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такая, что для всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $f(\sin x) - f(\cos x) = 1$? Ответы обоснуйте.

Решение: а) Годится $f(x) = x^2$. В этом случае $f(\cos x) = \cos^2 x$, $f(\sin x) = \sin^2 x$, и равенство $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$ превращается в основное тригонометрическое тождество.

б) Пусть $f(x)$ — требуемая функция. Тогда при $x = 0$ имеем

$$1 = f(\sin x) - f(\cos x) = f(\sin 0) - f(\cos 0) = f(0) - f(1).$$

Аналогично, при $x = \dfrac{\pi}{2}$ получим

$$1 = f(\sin x) - f(\cos x) = f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = f(1) - f(0).$$

Из полученных двух равенств получаем, что разность $f(1) - f(0)$ должна одновременно равняться 1 и -1, что невозможно.

Ответ: а) Существует. б) Не существует.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ на оба пункта	7 баллов
Верно и обосновано решён пункт «б»	4 балла
Верно и обосновано решён пункт «а»	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

10.4. *Имеется* 11 *таких натуральных чисел, что суммы любых двух из них попарно различны. Докажите, что разность каких-то двух их них больше* 27.

Решение: Предположим противное. Тогда разность между наименьшим и наибольшим числом не больше 27. Обозначим наименьшее из 11-и данных чисел через n. Значит, каждое из этих чисел находится на отрезке $[n; n + 27]$, причём число $n + 27$ может и не достигаться. Заметим, что все 11 чисел попарно различны, поскольку в противном случае среди попарных сумм будут и одинаковые, что противоречит условию задачи. Наименьшая возможная сумма пары чисел из набора равна $n + (n + 1) = 2n + 1$ а наибольшая сумма не превосходит числа $(n + 27) + (n + 26) = 2n + 53$. Всего различных сумм, таким образом, будет не более $2n + 53 - 2n = 53$. Но, с другой стороны, различных пар в наборе ровно $\dfrac{11 \cdot 10}{2} = 55$. Значит, по принципу Дирихле среди них есть по крайней мере две с одинаковой суммой. Противоречие с условием задачи.

Примечание: Оценка 27 не является точной; наибольшая из попарных разностей значительно больше. Точная оценка авторам пакета неизвестна.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Примеры конкретных наборов чисел и/или рассуждения, не приведшие к идее доказательства	0 баллов

10.5. *Из одной точки круговой дорожки ледового стадиона в одном направлении одновременно стартовали два конькобежца. Первый бежит равномерно, и пробегает круг за 40 сек. Второй начинает быстрее, и первый круг пробегает за 30 сек, но в дальнейшем его скорость падает (не обязательно равномерно); при этом на каждый следующий круг он тратит ровно на 1 сек больше, чем на предыдущий.*

а) Через сколько секунд с момента начала бега оба конькобежца впервые одновременно окажутся в точке старта?

б) Сколько раз они одновременно окажутся в точке старта, если будут бегать в течение 1 часа?

Ответы обоснуйте.

Решение: Пусть второй конькобежец пробежал ровно n кругов. На этот пробег он потратил времени (в секундах) ровно

$$30+(30+1)+(30+2)+\ldots+(30+n-1)=$$
$$=30n+(1+2+\ldots+(n-1))=30n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(59+n)n}{2}.$$

Сейчас он находится в точке старта. Для того, чтобы первый конькобежец также был в точке старта, необходимо и достаточно, чтобы найденное время нацело делилось на 40, то есть чтобы число $(59+n)n$ было кратно 80. Найдём такие n. Так как числа n и $59+n$ разной чётности, одно из них должно быть кратно 16. Также одно из них делится без остатка на 5. Возможно четыре случая:

1) n делится и на 16 и на 5 без остатка, то есть n кратно 80.

2) $n+59$ делится и на 16 и на 5 без остатка. Тогда $n+59$ делится на 80, также на 80 делится и $n+59-80=n-21$, то есть n при делении на 80 даёт в остатке 21.

3) n делится на 16, а $n+59$ — на 5. Тогда n чётно, и последняя цифра нечётного числа $n+59$ равна 5. Значит, число n оканчивается цифрой 6 и из его делимости на 16 следует что $n=16,96,176,\ldots$ Иными словами, n при делении на 80 даёт в остатке 16.

4) n делится на 5, а $n+59$ (а, значит, и $n-5$) кратно 16. Отсюда $n-5=16t$, где t — целое, то есть $n=16t+5$. Для делимости n на 5 в этом случае необходимо и достаточно, чтобы t было кратным 5, то есть n должно давать в остатке 5 при делении на 80.

Окончательно имеем: конькобежцы оказываются одновременно в точке старта, когда количество кругов, сделанное вторым конькобежцем при делении на 80 даёт один из четырёх остатков: 0, 5, 16 или 21. Впервые это случится, когда второй конькобежец пробежит 5 кругов; ему на это потребуется $\dfrac{(59+5)\cdot 5}{2} = 160$ сек, или 2 мин 40 сек. Это — ответ на пункт «а».

Для ответа на пункт «б» найдём, сколько полных кругов пробежит второй конькобежец за час. Это — наибольшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{(59+n)n}{2} \leqslant 3600.$$

Заметим, что неравенство выполнено при $n = 60$ и не выполнено при $n = 61$. Значит, за час второй конькобежец пробежит 60 полных кругов. Одновременно с первым он будет в точке старта всего три раза: после 5 кругов, после 16 кругов и после 21 круга.

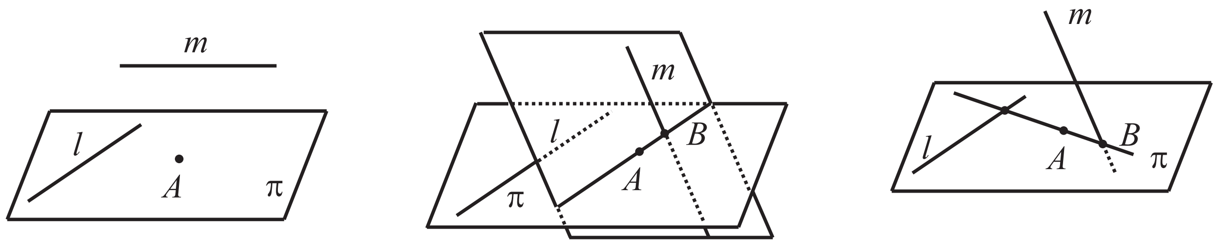
Ответ: а) через 240 сек; б) 3 раза.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ на оба пункта	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно приведшие к неверному ответу	-1 балл за каждую
Верно и обоснованно решён пункт «б»	5 баллов
Задача верно сведена к уравнению в целых числах и верно решён пункт «а»	4 балла
Задача верно сведена к уравнению в целых числах ИЛИ верно и обоснованно решён пункт «а» и найдено количество полных кругов, которые второй конькобежец пробежал за час	3 балла
Верно и обоснованно решён пункт «а»	2 балла
Найдено количество полных кругов, которые второй конькобежец пробежал за час	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

10.6. *Даны две скрещивающиеся прямые l и m. Укажите геометрическое место таких точек A, что существует единственная прямая, проходящая через точку A и пересекающая обе прямые l и m.*

Решение: Точка A не лежит ни на одной из прямых l и m — иначе прямых, пересекающих l и m бесконечно много. Значит, существует единственная плоскость, проходящая через точку A и прямую l — плоскость π. Любая прямая, которая проходит через точку A и пересекает прямую l, обязана лежать в плоскости π, так как имеет с этой плоскостью две общие точки: точку A и точку пересечения с прямой l.



К решению задачи 10.6

Значит, если прямая m параллельна плоскости π, то нужных нам прямых нет (см. рисунок слева). В плоскости π прямая m не лежит, так как она скрещивается с прямой l. Поэтому m должна пересекать плоскость π в единственной точке B. Прямая AB не совпадает с прямой l, поэтому если $AB \parallel l$ (см. рисунок в центре), то прямых, пересекающих обе прямые и l, и m снова нет, а если $AB \nparallel l$ (см. рисунок справа) — то такая прямая единственна. Ещё заметим, что первый случай возникает тогда и только тогда, когда плоскость, проходящая через точку A и прямую m, параллельна прямой l.

Ответ: Все точки пространства за исключением двух плоскостей: плоскости, проходящей через прямую l параллельно прямой m и плоскости, проходящей через прямую m параллельно прямой l.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Приведён верный ответ и доказано, что любая точка предъявленного множества удовлетворяет условию задачи	4 балла
Доказано, что в плоскости, проходящей через одну из прямых параллельно другой прямой, точка A не лежит	3 балла
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием) и/или доказано, что точка A не может лежать на прямых m и l	1 балл
Рассуждения и выкладки, не приведшие к идее решения	0 баллов