XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа и критерии оценивания, 1 день

1. *Два бегуна бегают с равными постоянными скоростями по диагоналям AC и BD соответственно квадрата ABCD. Добежав до конца диагонали, бегун сразу поворачивает обратно. Стартовали они одновременно из двух случайно выбранных точек своих диагоналей. Докажите, что найдётся момент, когда расстояние между бегунами будет* ***строго*** *меньше половины диагонали квадрата.* (И. Рубанов)

Решение. Рассмотрим момент, когда бегун с диагонали AC находится в точке O пересечения диагоналей. Если второй бегун в этот момент не находится в точке B или D, расстояние между бегунами будет меньше половины диагонали, и задача решена. В противном случае будем считать для определенности, что второй бегун в этот момент находится в точке B, а первый движется из A в C. Поскольку скорости бегунов равны, в момент, когда первый добежит до середины E отрезка OC, второй будет в середине F отрезка BO, и расстояние $EF < EO+OF = AC/2$, что и требовалось.

Критерии. Показано, что будет момент, когда расстояние между бегунами будет *не больше* половины диагонали, дальнейшего содержательного продвижения нет: *2 балла*.

2. *Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{100}$ — сто простых чисел, среди которых нет одинаковых. Натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$, большие 1, таковы, что каждое из чисел $p_1 p_2^3, p_2 p_3^3, \ldots, p_{99} p_{100}^3, p_{100} p_1^3$ равно произведению каких-то двух из чисел $a_1, \ldots, a_k$. Докажите, что $k \geq 150$.* (И. Рубанов)

Решение. Будем называть натуральное число *белым*, если оно делится на квадрат какого-нибудь простого числа, и *черным* в противном случае. Скажем, что число a_i *обслуживает* число из списка $p_1 p_2^3, p_2 p_3^3, \ldots, p_{99} p_{100}^3, p_{100} p_1^3$ (*), если оно дает его в произведении с каким-либо a_j. Очевидно, что при этом одно из чисел a_i, a_j — белое, а другое — черное. Так как белое число может обслуживать не более одного числа из списка (*), *белых чисел среди a_i не менее 100*. Кроме того, если черное число обслуживает число $p_{k-1} p_k^3$, то оно равно p_{k-1}, p_k или $p_{k-1}p_k$, и потому может обслуживать не более двух чисел из списка (*). Значит, *черных чисел среди a_i не менее 50*. Таким образом, $k \geq 100+50 = 150$, что и требовалось доказать.

Критерии. То, что каждое белое число может обслуживать не более одного, а каждое чёрное — не более двух чисел из списка (*), считаем очевидным, отсутствие обоснования *оценки не снижает*.

Доказано, что среди a_i есть не менее 100 чисел, обслуживающих только одно число из списка (*), дальнейшего содержательного продвижения нет: *3 балла*.

3. *В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа 1, 2, …, 99, 100. Назовём* ***уголком*** *фигуру, которая получается удалением одной клетки из квадрата 2×2. Назовем уголок* ***хорошим****, если число в его клетке, граничащей по сторонам с двумя другими, больше чисел, стоящих в этих двух других клетках. Каково наибольшее возможное число хороших «уголков»? »? (Каждый уголок учитывается независимо от того, как он расположен по отношению к другим, разные уголки могут частично накладываться).*А. Голованов)

Ответ. 162. **Решение**. Назовём *центром* «уголка» клетку, которая граничит по сторонам с двумя другими его клетками. Рассмотрим любой квадрат 2×2, находящийся в нашей таблице. В нём содержится 4 «уголка». При этом хорошими из них могут быть только те, в центрах которых находятся два наибольших числа из тех, что находятся в нашем квадрате 2×2. Так как каждый «уголок» находится в каком-либо квадрате 2×2, отсюда следует, что хороших уголков в нашей таблице не больше половины от их общего числа, равного 4×81, так как всего в нашей таблице имеется 81 квадрат размером 2×2 (например, потому, что левые верхние клетки всех таких квадратов образуют квадрат 9×9). Итак, мы доказали, что хороших уголков не больше, чем 4×81/2 = 162. Приведем пример, когда их ровно 162. Покрасим клетки таблицы в два цвета в шахматном порядке, и произвольным образом поставим на чёрные клетки числа от 51 до 100, а на белые — числа от 1 до 50. Легко видеть, что в этом случае в каждом квадрате 2×2 будет ровно два хороших уголка с центрами в черных клетках.

Критерии. Только ответ: *0 баллов*.

Найдено общее число «уголков» в таблице, дальнейшего содержательного продвижения нет: *0 баллов*.

Доказано, что хороших «уголков» не более половины от общего числа «уголков» в таблице, примера нет: *3 балла*.

Построен пример, когда хороших «уголков» ровно половина от общего числа, содержательного продвижения в доказательстве оценки нет: *3 балла*.

Есть описанные в двух предыдущих критериях оценка и пример, но общее число уголков в таблице не найдено или найдено неверно: *6 баллов*.

4. *На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E. Биссектриса AL пересекает отрезок BE в точке X. Оказалось, что $AX = XE$ и $AL = BX$. Чему равно отношение углов A и B треугольника?* (С. Берлов)

Ответ. 2. **Решение**. Пусть прямая, проходящая через точку E параллельно AL, пересекает прямые BC и BA в точках P и Q соответственно. Из подобия треугольников ABL и QBP имеем $PQ/AL = BE/BX = BE/AL$, откуда $PQ = BE$. В силу параллельности прямых AL и PQ имеем $\angle AQE = \angle XAE = \angle AEQ$, откуда $AE = AQ$. Кроме того, из равенства $AX = XE$ следует, что $\angle AEB = \angle AEX = \angle XAE$, откуда $\angle AEB = \angle AQE$. Таким образом, треугольники AQP и AEB равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AP = AB$ и $\angle BAE = \angle PAQ = 2\angle CBA$, откуда и получаем ответ.

Критерии. Только ответ: *0 баллов*.

5. *По кругу расставлено 99 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех стоящих подряд чисел сумма двух первых из них по часовой стрелке равна произведению двух последних из них по часовой стрелке. Чему может быть равна сумма всех 99 расставленных чисел?* (С. Берлов)

Ответ.198. **Решение**. Пусть подряд стоят числа a, b, c, d, e. Заметим, что если $a > c$, то $a+b > b+c$, откуда $cd > de$, то есть $c > e$. Продолжая это рассуждение, получим, что каждое число больше числа, идущего по часовой стрелке через одно от него. Но тогда, записав цепочку из 98 таких неравенств, начиная с какого-то числа a, получим, что $a > a$ — противоречие. Значит, все 99 расставленных чисел равны одному и тому же числу a, такому, что $2a = a^2$, откуда $a = 2$, а искомая сумма равна $2\times99 = 198$.

Критерии. Только ответ, с примером или без: *0 баллов*.