

## 9 класс

### Второй день

- 9.6. Для натурального числа  $n$  обозначим через  $S_n$  наименьшее общее кратное всех чисел  $1, 2, \dots, n$ . Существует ли такое натуральное число  $m$ , что  $S_{m+1} = 4S_m$ ?
- 9.7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали  $\frac{99 \cdot 98}{2}$  чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть  $d$  — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение  $d$ .
- 9.8. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < BC$ . Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно, а  $H$  — основание высоты, опущенной из вершины  $B$ . Вписанная окружность касается стороны  $AC$  в точке  $K$ . Прямая, проходящая через  $K$  и параллельная  $MN$ , пересекает отрезок  $MN$  в точке  $P$ . Докажите, что в четырехугольнике  $AMPK$  можно вписать окружность.
- 9.9. Найдите наибольшее число  $m$  такое, что для любых положительных чисел  $a, b$  и  $c$ , сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geq m.$$

- 9.10. Куб  $100 \times 100 \times 100$  разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок  $1 \times 1 \times 100$ . У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно  $k$  лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, используя не более  $k/100$  переключателей с красной грани.