

11 класс

Первый день

- 11.1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a , b , c таких, что a делится на $b + c$ и $b + c$ делится на $b - c + 1$?
- 11.2. Даны различные вещественные числа a_1 , a_2 , a_3 и b . Оказалось, что уравнение $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = b$ имеет три различных вещественных корня c_1 , c_2 , c_3 . Найдите корни уравнения $(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) = b$.
- 11.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.
- 11.4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1, 2)$. Если на доске написана пара чисел (a, b) , то на доску можно дописать пару $(-a, -b)$, а также пару $(-b, a + b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a, b) и (c, d) , то на доску можно дописать пару $(a + c, b + d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022, 2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1, 2)$ и $(2, 1)$ считаются различными.
- 11.5. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведена высота AH , медиана AM , а также отмечен центр O его описанной окружности ω . Отрезки OH и AM пересекаются в точке D , прямые AB и CD — в точке E , прямые BD и AC — в точке F . Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y . Докажите, что прямые BX , AY и AH пересекаются в одной точке.