Условия и решения задач

9 класс

9.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geqslant 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Замечание. Можно показать, что $S_{m+1} > S_m$ только тогда, когда число $m+1$ является степенью некоторого простого числа p; в этом случае отношение S_{m+1}/S_m будет равно p.

Комментарий. Заявлено, что S_{m+1}/S_m не может делиться на квадрат простого числа, но это утверждение не доказано или доказано неверно — 1 балл.

9.7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d. (*Л. Самойлов*)

Ответ. $d = 7$.

Решение. Докажем, что $d \geqslant 7$. Все числа с доски разбиваются на *цепочки* чисел вида $a, a+1, a+2, \ldots, a+t$ так, что числа из разных цепочек не отличаются ровно на 1. Такое разбиение нетрудно построить, соединив любые два числа, отличающиеся на 1, отрезком и рассмотрев полученные ломаные.

Пусть получилось k цепочек, в которых $n_1, n_2, \ldots, n_k$ чисел соответственно (некоторые цепочки могут состоять из одного числа). В цепочке из n_i чисел есть ровно $n_i - 1$ пара чисел, отличающихся на 1. Поэтому общее количество единиц в тетрадке равно

$(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_k-1)=(n_1+n_2+\ldots+n_k)-k=99-k,$

откуда $k=99-85=14$. Значит, в одной из цепочек не меньше, чем $99/14$ чисел, то есть не меньше 8 чисел. Разность наибольшего и наименьшего чисел в такой цепочке не меньше $8-1=7$.

Осталось привести пример, в котором $d=7$. Такой пример дают, например, числа

$$0=\frac{0}{14},\ \frac{1}{14},\ \frac{2}{14},\ \ldots,\ \frac{98}{14}=7.$$

Действительно, в этом примере $d=7$, и ровно для первых 85 из этих чисел в наборе есть число, на единицу большее.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Все возможные оптимальные примеры устроены так: есть ровно одна цепочка из 8 чисел (от a до $a+7$), а также 13 цепочек, каждая — из 7 чисел; все числа этих остальных цепочек должны располагаться между a и $a+7$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён только пример с $d=7$, удовлетворяющий условиям задачи — 2 балла.

Приведена только оценка, показывающая, что $d\geqslant 7$ — 5 баллов.

Сформулированное утверждение о том, что все числа разбиваются на цепочки, в каждой из которых числа отличаются на 1 (а разности чисел из разных цепочек не равны 1), принимается без доказательства. Сформулированное утверждение, что в цепочке из n_i чисел не более n_i-1 единичных разностей, тоже принимается без доказательства.

9.8. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB<BC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а H — основание высоты, опущенной из вершины B. Вписанная окружность касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через K и параллельная MH, пересекает отрезок MN в точке P. Докажите, что в четырехугольник $AMPK$ можно вписать окружность. (*П. Бибиков*)

Первое решение. Совершим гомотетию с центром A и коэффициентом 2. При этой гомотетии точки M и N переходят в B и C соответственно; пусть точки K и P переходят соответственно в K' и P' (см. рис. 1). Тогда достаточно доказать, что четырёхугольник $ABP'K'$ описан. Мы докажем, что он описан около вписанной окружности ω треугольника ABC. Три стороны четырёхугольника уже касаются ω, поэтому достаточно доказать, что её касается $P'K'$.

Пусть I — центр ω. Тогда $KK' = AK$, поэтому A и K' симметричны относительно KI. Далее заметим, что $\angle P'K'A = \angle PKA = \angle MHA$. Но MH — медиана в прямоугольном треугольнике AHB, поэтому $\angle MHA = \angle MAC$. Значит, $\angle P'K'A = \angle BAC$. Значит, и прямые AB и $K'P'$ также симметричны относительно KI; поскольку одна из них касается ω, то и другая тоже. Это и требовалось доказать.

Замечание. У решения выше есть несколько вариаций. Например, похожими рассуждениями можно показать, что в четырёхугольнике $AMPK$ биссектрисы трёх углов A, M и K проходят через одну точку — середину отрезка AI. Отсюда следует, что эта середина — центр искомой вписанной окружности.

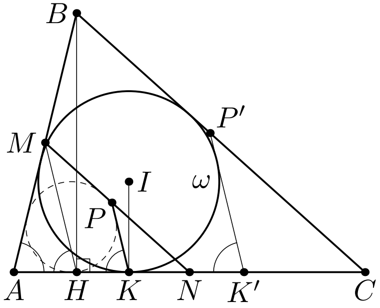

Рис. 1

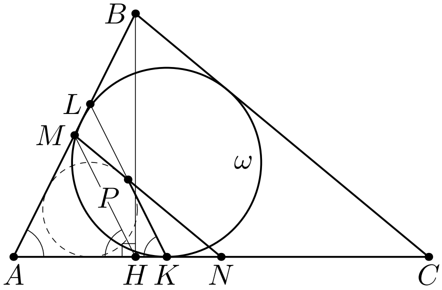

Рис. 2

Второе решение. Пусть прямая PK пересекает прямую AB в точке L (см. рис. 2). Как и в решении выше, получаем, что $\angle AKL = \angle AHM = \angle LAK$, откуда $LA = LK$.

Мы докажем, что окружности, вписанные в треугольники AKL и AMN, совпадают (тогда это и будет вписанная окружность четырёхугольника $AMPK$). Поскольку обе окружности вписаны в угол BAC, для этого достаточно показать, что они касаются прямой AB в одной и той же точке. Как известно, расстояния от A до точек касания этих окружностей с AB

равны соответственно $\dfrac{AL+AK-KL}{2}$ и $\dfrac{AM+AN-MN}{2}$. Значит, нам надо доказать, что $AL+AK-KL = AM+AN-MN$, или что $ML-KL = KN-MN$.

Обозначим полупериметр треугольника ABC через p, и пусть $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Имеем $ML-KL = (AL-AM)-KL = -AM = -\frac{c}{2}$. С другой стороны, $KN-MN = (AN-AK)-MN = \left(\frac{b}{2}-(p-a)\right)-\frac{a}{2} = \frac{a+b}{2}-p = -\frac{c}{2}$, откуда и следует искомое равенство.

Замечание. Во втором абзаце решения по сути доказан следующий известный признак: четырёхугольнике $AMPK$ описан тогда и только тогда, когда $ML-KL = KN-MN$ (где N и L — точки пересечения продолжений боковых сторон, расположенные как на рисунке).

Комментарий. Признак описанности, сформулированный в замечании выше, принимается без доказательства.

9.9. Найдите наибольшее число m такое, что для любых положительных чисел a, b и c, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geqslant m.$$

(*Л. Емельянов*)

Ответ. $m = 1$.

Первое решение. Докажем сначала, что $m = 1$ удовлетворяет требованиям задачи. Заметим, что $ab+c = ab+c(a+b+c) = (c+a)(c+b)$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}} =$$

$$= \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}\sqrt{a+b}+\sqrt{bc}\sqrt{b+c}+\sqrt{ca}\sqrt{c+a}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Значит, осталось доказать неравенство

$$\sqrt{ab}\sqrt{a+b}+\sqrt{bc}\sqrt{b+c}+\sqrt{ca}\sqrt{c+a} \geqslant \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Возведем это неравенство в квадрат; оно примет вид

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}+$$
$$+2\sqrt{bc^2a(b+c)(c+a)}+2\sqrt{ca^2b(c+a)(a+b)}\geqslant$$
$$\geqslant a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc.$$

После сокращения слева останется сумма корней, а справа — $2abc$. Но любой из корней не меньше, чем abc; действительно, например, $\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}\geqslant\sqrt{ab^2c\cdot ac}=abc$. Отсюда и следует требуемое.

Осталось доказать, что при любом $m>1$ неравенство выполнено не всегда; достаточно это сделать при $1<m<3$. Пусть $m=1+2t$ при $0<t<1$. Положим $a=b=\frac{1-t^2}{2}$ и $c=t^2$. Тогда $a+b+c=1$, однако

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}<\sqrt{\frac{ab}{ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}=1+2t=m.$$

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что $m=1$ подходит. Для этого докажем, что если a — наибольшее из чисел a, b, c, то верно даже неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\geqslant 1.$$

Обозначим $t=1/a$, $\mu=b/c$; заметим, что $1>a\geqslant\frac{1}{3}$, поэтому $1<t\leqslant 3$. Левая часть неравенства выше переписывается как

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sqrt{\frac{1}{1+c/(ab)}}+\sqrt{\frac{1}{1+b/(ac)}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+t/\mu}}+\frac{1}{\sqrt{1+t\mu}}.$$

Значит, нам достаточно доказать, что

$$\sqrt{1+t/\mu}+\sqrt{1+t\mu}\geqslant\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)}.$$

Возводя это неравенство в квадрат, получаем

$$1+t/\mu+1+t\mu+2\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)}\geqslant 1+t/\mu+t\mu+t^2;$$

после сокражения подобных слагаемых получаем, что нам достаточно доказать неравенство

$$2\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)}\geqslant t^2-1=(t-1)(t+1).$$

Наконец, это неравенство вытекает из неравенств $2 \geqslant t-1$ (поскольку $t \leqslant 3$) и

$$(1+t/\mu)(1+t\mu) = 1+t^2+t(\mu+1/\mu) \geqslant 1+t^2+2t = (t+1)^2,$$

где мы применили неравенство о средних.

Комментарий. Только пример, показывающий, что при любом $m > 1$ неравенство выполнено не всегда — 2 балла.

Только доказательство того, что $m = 1$ удовлетворяет требованиям задачи — 5 баллов.

9.10. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно k лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более $k/100$ переключателей с красной грани.

(*С. Кудря, И. Богданов*)

Решение. Ясно, что результат нажатия нескольких переключателей не зависит от того, в каком порядке эти нажатия были произведены — количество переключений каждой лампочки не зависит от этого порядка. В частности, можно считать, что Петя использовал каждый переключатель не более одного раза.

Весь куб разбивается на 100 *слоёв*, параллельных красной грани. Каждый переключатель на некрасной грани переключает лампочки в одном слое, а каждый переключатель на красной грани — по лампочке во всех 100 слоях.

После действий Пети найдётся слой, в котором включено $d \leqslant k/100$ лампочек — назовём один такой слой *главным*. Пусть $\mathcal{V}$ — набор из d переключателей на красной грани, связанных со включёнными лампочками в главном слое. Мы докажем, что Вася сможет погасить все лампочки, использовав с красной грани ровно эти переключатели.

Запустим несколько другой процесс, начиная с того же исходного положения. Пусть $\mathcal{P}$ — набор переключателей с красной грани, использованных Петей, а $\mathcal{Q}$ — набор использованных им переключателей с некрасных граней, связанных с главным слоем. Пусть Петя применит $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а затем Вася применит $\mathcal{V}$. После действий Пети в главном слое будут гореть те же d лампочек, что и раньше, а значит, после действий Вася все лампочки в главном слое будут погашены. Если теперь Вася применит в каждом из остальных слоёв наборы переключателей с некрасных граней, аналогичные $\mathcal{Q}$, то все лампочки будут погашены.

Пусть теперь Петя применит все остальные переключатели (с некрасных граней!), которые он применял исходно, а Вася применит их ещё по разу. Все лампочки по-прежнему будут погашены. При этом в новом процессе Петя применил ровно те же переключатели, что и в исходном, а Вася использовал лишь переключатели набора $\mathcal{V}$ с красной грани (и какие-то — с остальных граней). Значит, если в исходном процессе Вася совершит те же действия, которые он сделал в новом, он добьётся требуемого.

Комментарий. Замечание о том, что результат не зависит от порядка нажатий, принимается без обоснований.

Выбран слой, в котором горит $d \leqslant k/100$ лампочек, и утверждается, что Вася может обойтись ровно переключателями с красной грани, переключающими эти d лампочек (а доказательство этого факта отсутствует или неверно) — 2 балла.