

## 11 класс

- 11.6. Для натурального числа  $n$  обозначим через  $S_n$  наименьшее общее кратное всех чисел  $1, 2, \dots, n$ . Существует ли такое натуральное число  $m$ , что  $S_{m+1} = 4S_m$ ? (А. Кузнецов)

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Предположим противное. Пусть  $S_{m+1}$  делится на  $2^s$ , но не делится на  $2^{s+1}$ ; тогда  $s \geq 2$ . Это значит, что среди чисел  $1, 2, \dots, m+1$  есть число  $a$ , делящееся на  $2^s$ . Но тогда число  $a/2$  уже не превосходит  $m$  и делится на  $2^{s-1}$ ; значит, и  $S_m$  делится на  $2^{s-1}$ . Поэтому  $S_{m+1}/S_m$  не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

**Замечание.** Можно показать, что  $S_{m+1} > S_m$  только тогда, когда число  $m+1$  является степенью некоторого простого числа  $p$ ; в этом случае отношение  $S_{m+1}/S_m$  будет равно  $p$ .

**Комментарий.** Заявлено, что  $S_{m+1}/S_m$  не может делиться на квадрат простого числа, но это утверждение не доказано или доказано неверно — 1 балл.

- 11.7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника. (Е. Молчанов)

**Ответ.** Не всегда.

**Решение.** Возьмём прямоугольник размера  $5 \times 15$ , половина площади которого равняется  $37,5$ . Для того, чтобы условие выполнялось, из данного прямоугольника необходимо вырезать прямоугольник площади  $37$  или  $38$ . Таких прямоугольников всего три:  $1 \times 37$ ,  $1 \times 38$  и  $2 \times 19$ . Заметим, что длинная сторона каждого из таких прямоугольников не меньше  $19$ . С другой стороны, диагональ исходного прямоугольника равняется  $\sqrt{250}$ , но  $\sqrt{250} < \sqrt{256} = 16 < 19$ , поэтому ни один из таких прямоугольников вырезать из прямоугольника  $5 \times 15$  нельзя.

**Комментарий.** Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верный пример вырезания без полного обоснования — не более 4 баллов.

Пример работает только в случае, когда прямоугольник вырезается по линиям сетки — не более 2 баллов.

- 11.8. Точка  $O$  — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника  $ABC$ . На биссектрисе угла  $ABC$  внутри треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ , а на отрезке  $BD$  — точка  $E$  так, что  $AE = BE$  и  $BD = CD$ . Точки  $P$  и  $Q$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $AOE$  и  $COD$  соответственно. Докажите, что точки  $A$ ,  $C$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой или на одной окружности. (А. Кузнецов)

**Решение.** Обозначим вторую точку пересечения биссектрисы угла  $ABC$  с окружностью, описанной около треугольника  $ABC$ , через  $F$  (см. рис. 5). Тогда точка  $F$  — середина дуги  $AC$ , поэтому  $OF$  — серединный перпендикуляр к хорде  $AC$ . Поскольку вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу, то  $\angle FOC = 2\angle FBC$ . С другой стороны, так как  $BD = DC$ , то  $\angle DCB = \angle CBD$ , а тогда  $\angle CDF = \angle DCB + \angle DBC = 2\angle DBC = 2\angle FBC$  как внешний к треугольнику  $BDC$ . Таким образом,  $\angle FOC = \angle FDC$ , поэтому точка  $F$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $COD$ . Рассуждая аналогично, мы получаем, что  $\angle AOF = 2\angle ABF = \angle AEF$ , и точка  $F$  лежит и на окружности, описанной около треугольника  $AOE$ . Значит, точки  $P$  и  $Q$  — центры описанных окружностей треугольников  $AOE$  и  $COF$ , а эти треугольники симметричны относительно  $OF$ . Получается, что точки  $P$  и  $Q$  также симметричны относительно  $OF$ . Следовательно, либо точки  $P$  и  $Q$  лежат на прямой  $AC$ , либо  $P$ ,  $Q$ ,  $A$ ,  $C$  — вершины равнобокой трапеции, а потому лежат на одной окружности.

**Комментарий.** Построена середина меньшей дуги  $AC$  окружности  $ABC$  (в решении названа  $F$ ) — 0 баллов.

Доказано, что  $F$  лежит на одной из окружностей, описанных около треугольников  $AOE$  и  $COD$  — 3 балла.

Доказано, что точка  $F$  лежит на обеих окружностях — 4 балла.

Доказано, что радиусы окружностей равны — 1 балл.

Доказано, что точки  $P$  и  $Q$  симметричны относительно се-



ми. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на  $k$  межобластных и  $m$  внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство  $k - m \geq n$ . (М. Дидин)

**Решение.** Докажем индукцией по  $n$ , что в любом связном графе, содержащем  $2n$  вершин, их можно покрасить в красный и синий цвета таким образом, что число рёбер с разноцветными концами (будем называть такие рёбра *разноцветными*) будет превосходить число рёбер с одноцветными концами (будем называть такие рёбра *одноцветными*) хотя бы на  $n$  — из этого будет следовать утверждение задачи. База  $n = 1$  тривиальна, докажем переход.

Предположим, в графе с  $2n$  вершинами найдётся пара вершин, соединённых ребром, при удалении которых граф не теряет связность; обозначим эти вершины через  $u$  и  $v$ . Покрасим оставшиеся вершины таким образом, чтобы число разноцветных рёбер было хотя бы на  $n - 1$  больше числа одноцветных рёбер — так можно сделать по предположению индукции. Заметим, что вершины  $u$  и  $v$  теперь можно покрасить таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных рёбер увеличится. В самом деле, без ограничения общности будем считать, что если вершины  $u$  и  $v$  не имеют обе чётные степени, то вершина  $u$  имеет нечётную степень. Тогда покрасим вершину  $u$  в цвет, который имеет меньшинство её соседей (в случае равенства покрасим в любой цвет), а затем покрасим таким же образом вершину  $v$ . Очевидно, при каждой покраске требуемая разность не уменьшилась, и хотя бы при одной покраске у соответствующей вершины было нечётное число покрашенных соседей, то есть разность при этой покраске увеличилась. Поскольку до покраски вершин  $u$  и  $v$  разность между числом разноцветных рёбер и числом одноцветных рёбер была не меньше  $n - 1$ , после этой покраски она стала не меньше  $n$ .

С другой стороны, если в графе найдётся пара висячих вершин, то, очевидно, при их удалении граф по-прежнему не теряет связность, и тем же самым алгоритмом можно покрасить весь остальной граф, а затем и эти висячие вершины, таким образом,

что разность между количествами разноцветных и одноцветных рёбер будет не меньше  $n$ . Докажем, что в любом связном графе хотя бы с тремя вершинами или найдутся две смежные вершины, при удалении которых граф останется связным, или найдутся две висячие вершины.

В самом деле, рассмотрим произвольное остовное дерево этого графа и подвесим его за любую не висячую вершину. Пусть  $v$  — наиболее удалённая от корня висячая вершина этого дерева, а  $u$  — предок этой вершины. Обозначим потомков этого предка через  $v_1, \dots, v_k$ . Заметим, что вершины  $v_1, \dots, v_k$  являются висячими в рассматриваемом остовном дереве. Рассмотрим несколько случаев.

*Случай 1.* Среди вершин  $v_1, \dots, v_k$  есть пара вершин, соединённых ребром в исходном графе. Тогда при удалении этих двух вершин остовное дерево (а значит, и сам исходный граф) сохраняет связность.

*Случай 2.* Среди вершин  $v_1, \dots, v_k$  есть пара вершин, являющихся висячими в исходном графе. Значит, в исходном графе есть хотя бы две висячие вершины.

*Случай 3.* Среди вершин  $v_1, \dots, v_k$  есть не больше одной вершины, являющейся висячей в исходном графе. Без ограничения общности, будем считать, что если такая вершина есть, то это вершина  $v_1$ . Тогда переподвесим каждую из вершин  $v_2, \dots, v_k$  к любому из её соседей, отличных от  $u$ : поскольку эти вершины не являются висячими в исходном графе, такой сосед всегда найдётся. После всех переподвешиваний вершины  $u$  и  $v_1$  можно будет удалить из графа, и остовное дерево останется связным — а значит, и сам граф.

Поскольку хотя бы один из случаев имеет место, и в каждом из них в графе есть или пара смежных вершин, при удалении которых граф остаётся связным, или пара висячих вершин, переход индукции доказан.

**Замечание.** Неравенство из задачи является точным: в частности, в полном графе на  $2n$  вершинах соответствующая разность не может быть строго больше  $n$ .

**Комментарий.** Решение сведено к доказательству утверждения о том, что в любом связном графе хотя бы с тремя вер-

пинами или найдутся две смежные вершины, при удалении которых граф остаётся связным, или найдутся две висячие вершины — 3 балла.