

10 класс

- 10.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m , что $S_{m+1} = 4S_m$? (А. Кузнецов)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s , но не делится на 2^{s+1} ; тогда $s \geq 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \dots, m+1$ есть число a , делящееся на 2^s . Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1} ; значит, и S_m делится на 2^{s-1} . Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Замечание. Можно показать, что $S_{m+1} > S_m$ только тогда, когда число $m+1$ является степенью некоторого простого числа p ; в этом случае отношение S_{m+1}/S_m будет равно p .

Комментарий. Заявлено, что S_{m+1}/S_m не может делиться на квадрат простого числа, но это утверждение не доказано или доказано неверно — 1 балл.

- 10.7. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа a_0, a_1, \dots, a_9 и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень. (А. Кузнецов, А. Антропов)

Решение. Пусть $\overline{x_i y_i z_i}$ — десятичная запись трехзначного числа a_i . Подстановка в левую часть уравнения $x = 1000$ даёт $a_9 \cdot 1000^9 + a_8 \cdot 1000^8 + \dots + a_1 \cdot 1000 + a_0 =$
 $= \overbrace{x_9 y_9 z_9 \underbrace{0000 \dots 0}_{27 \text{ нулей}}}_{27 \text{ нулей}} + \overbrace{x_8 y_8 z_8 \underbrace{0 \dots 0}_{24 \text{ нуля}}}_{24 \text{ нуля}} + \dots + \overbrace{x_1 y_1 z_1 000}_{24 \text{ нуля}} + \overbrace{x_0 y_0 z_0}_{24 \text{ нуля}}$
 $= \overbrace{x_9 y_9 z_9 x_8 y_8 z_8 \dots x_0 y_0 z_0}_{24 \text{ нуля}}$. Таким образом, после подстановки вместо звёздочки 30-значного числа $\overbrace{x_9 y_9 z_9 x_8 y_8 z_8 \dots x_0 y_0 z_0}_{24 \text{ нуля}}$ получится уравнение, имеющее корень 1000.

Комментарий. Заявлено, но не доказано, что при последовательной подстановке $x = 1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots$ значения левой части не «перепрыгнут» через 30-значные числа — 1 балл.

- 10.8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . На стороне AB выбрана точка L так, что

$AL = CK$. Отрезки AK и CL пересекаются в точке M . На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка N . Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90^\circ$. (А. Кузнецов)

Первое решение. Поскольку AM — биссектриса угла $LАН$, отрезки LM и MN равны как хорды, стягивающие равные дуги (см. рис. 3). Теперь достаточно доказать, что $CM = LM$ (тогда $CM = LM = MN$, значит, CNL — прямоугольный треугольник, и NM — его медиана, проведенная из прямого угла).

Так как $\angle BKA = \angle NAK = \angle BAK$, треугольник ABK — равнобедренный (симметричный относительно серединного перпендикуляра к AK). Отметим на стороне BK точку X так, что $LX \parallel AK$. Из симметрии треугольника ABK имеем $KX = AL$. Тогда имеем $KX = CK$ и $MK \parallel LX$, значит, MK — средняя линия треугольника CLX , значит, $CM = LM$, что завершает решение.

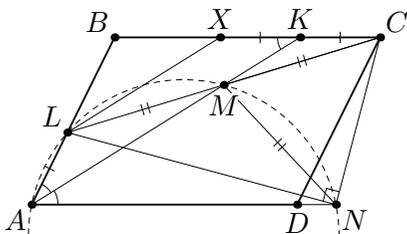


Рис. 3

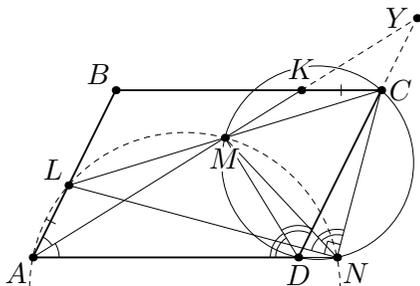


Рис. 4

Второе решение. Пусть $\angle BAD = 2\alpha$.

Заметим, что DM — биссектриса угла ADC . Действительно, продлим AK до пересечения с CD в точке Y (см. рис. 4). Тогда, используя подобия $AML \sim YMC$ и $AYD \sim KYC$, имеем $AM/MY = AL/YC = CK/YC = AD/DY$. Из полученного равенства $AM/MY = AD/DY$ вытекает, что DM — биссектриса треугольника ADY . Отсюда $\angle MDC = \angle ADC/2 = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$.

Из вписанности $ALMN$ имеем $\angle CMN = \angle LAD$, а из параллельности $AB \parallel CD$ следует $\angle LAD = \angle CDN$. Поэтому

$\angle CMN = \angle CDN$, значит, четырёхугольник $CMDN$ — вписанный. Отсюда $\angle MNC = \angle MDC = 90^\circ - \alpha$.

Из вписанности $\angle LNM = \angle LAM = \alpha$. Тогда $\angle LNC = \angle MNC + \angle LNM = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что в решении 2 при доказательстве того, что DM — биссектриса угла ADC , не использовалось то, что AM — биссектриса угла A . А при доказательстве вписанности $CMDN$ не использовалось также равенство $AL = CK$.

Комментарий. В случае, если задача не решена, оцениваются следующие продвижения. При этом баллы за продвижения суммируются, если их сумма не превосходит 3, иначе за все продвижения ставится 3 балла.

Доказано, что $LM = MN - 1$ балл.

Доказано, что $LM = CM - 2$ балла.

Доказано, что DM является биссектрисой угла $ADC - 2$ балла.

Доказано, что четырёхугольник $CMDN$ вписанный — 1 балл.

За другие начальные продвижения, например, за доказательство равнобедренности треугольника ABK или за равенство $\angle LNM = \angle LAM$, баллы не добавляются.

- 10.9. Дано натуральное число k . Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться? (М. Тихомиров, Ф. Петров)

Ответ. $3k - 1$.

Решение. Пронумеруем столбы от 1 до n вдоль дороги и примем за 1 расстояние между соседними столбами. Пару одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, будем называть *хорошей*.

Оценка. Пусть n столбов покрашены так, что условие задачи выполнено. Пусть n_i — количество столбов i -го цвета (далее считаем, что $n_i \geq 1$, т.е. все цвета присутствуют, иначе можно увеличить n , добавить столб нового цвета в конец). Пусть a_i и b_i — номера первого и последнего столбов i -го цвета.

Всего у нас есть $t = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k = n - k$ хороших пар столбов. Поскольку все расстояния между столбами в хороших парах различны, наименьшее из этих расстояний не меньше 1, следующее — не меньше 2, и т.д. Так, для суммы S расстояний во всех хороших парах получаем оценку $S \geq 1 + 2 + \dots + t = t(t + 1)/2$.

С другой стороны, сумма всех расстояний для i -го цвета равна $b_i - a_i$. Поэтому $S = (b_1 + \dots + b_k) - (a_1 + \dots + a_k)$. Сумма $b_1 + \dots + b_k$ не превышает суммы k самых больших среди номеров $1, 2, \dots, n$, а сумма $a_1 + \dots + a_k$ не меньше, чем сумма k наименьших среди номеров $1, 2, \dots, n$, поэтому $S \leq (n + (n - 1) + \dots + (n - k + 1)) - (1 + 2 + \dots + k) = k(n - k) = kt$.

Итак, $t(t+1)/2 \leq S \leq kt$, откуда $t \leq 2k - 1$ и $n = k + t \leq 3k - 1$.

Пример. Годится, например, покраска

$$1, 2, \dots, k - 1, k, k, k - 1, \dots, 2, 1, 2, 3, \dots, k - 1, k.$$

Здесь для цвета 1 единственная хорошая пара, и расстояние между столбами в ней равно $2k - 1$. Для всех остальных цветов есть две хорошие пары, при этом для цвета 2 имеем расстояния $2k - 3$ и 2, для цвета 3 — расстояния $2k - 5$ и 4, и т.д., для цвета k — расстояния 1 и $2k - 2$.

Замечание. Существуют и другие, более сложные примеры. Например, можно первые k столбов покрасить в цвета $1, 2, \dots, k$, а дальше столб с номером $k + s$, где $s = 2^p(2q - 1)$, окрасить в цвет q (скажем, для $k = 8$ покраска будет выглядеть так: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8$). Возможно индуктивное описание подходящих примеров.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

За решение задачи для конкретных небольших значений n без обобщения на произвольное n — баллы не начисляются.

За доказательство более слабой оценки или построения примера с $n < 3k - 1$ баллы не начисляются.

Если в решении (явно или неявно) предполагается, что все k цветов используются — баллы не снимаются.

Части «оценка» + «пример» оцениваются в 5+2 балла.

Оцениваются (и суммируются) следующие продвижения в части «оценка»:

(а) Найдено количество хороших пар столбцов ($n - k$ в случае использования всех k цветов) — 1 балл.

(б) Доказана нижняя оценка $S \geq 1 + 2 + \dots + (n - k) = (n - k)(n - k + 1)/2 - 1$ балл.

(в) Доказана верхняя оценка $S \leq k(n - k) - 2$ балла.

Для получения 2 баллов за часть «пример» достаточно предъявить подходящую покраску и показать, что она подходит. В случае покраски из решения доказательство того, что она подходит, очевидно, за отсутствие объяснения, что она подходит, баллы не снижаются. В случае предъявления неочевидных верных примеров (как, например, в замечании), за отсутствие доказательства, что покраска подходит, снимается 1 балл.

10.10. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x - y)\sqrt{3x^2 + y^2} + (y - z)\sqrt{3y^2 + z^2} + (z - x)\sqrt{3z^2 + x^2} \geq 0.$$

(П. Бибииков)

Решение. Докажем, что $(x - y)\sqrt{3x^2 + y^2} \geq (x - y)(x + y) = x^2 - y^2$. Если $x \geq y$, то $x - y \geq 0$ и $\sqrt{3x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = x + y$. Если же $x \leq y$, то $x - y \leq 0$ и $\sqrt{3x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = x + y$.

Складывая доказанное неравенство $(x - y)\sqrt{3x^2 + y^2} \geq x^2 - y^2$ с аналогичными неравенствами $(y - z)\sqrt{3y^2 + z^2} \geq y^2 - z^2$ и $(z - x)\sqrt{3z^2 + x^2} \geq z^2 - x^2$, получаем требуемое.

Комментарий. Нужное неравенство выведено из неравенства $(x - y)\sqrt{3x^2 + y^2} \geq x^2 - y^2$, которое не доказано или неверно доказано (например, доказано только при $x \geq y$) — 3 балла.