11 класс

11.1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a, b, c таких, что a делится на $b+c$ и $b+c$ делится на $b-c+1$? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, такие три числа найдутся. Поскольку a кратно $b+c$, сумма $a+(b+c)=2023$ также кратна $b+c$, из чего следует, что $b+c$ нечётно. Значит, $b-c+1$ — чётное число, и нечётное число $b+c$ не может на него делиться.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

11.2. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=b$ имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)=b$. (*А. Антропов, К. Сухов*)

Ответ. $-a_1$, $-a_2$ и $-a_3$.

Первое решение. Так как многочлен $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)-b$ имеет старший коэффициент 1 и корни c_1, c_2, c_3, то $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)-b=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$. Подставим $-x$ в последнее равенство вместо x, получим $(-x-a_1)(-x-a_2)(-x-a_3)-b=(-x-c_1)(-x-c_2)(-x-c_3)$, что равносильно $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)+b=(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)$. Из полученного равенства получаем, что тремя корнями уравнения $b=(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)$ являются числа $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$.

Второе решение. По теореме Виета выполняются следующие соотношения:

$$c_1+c_2+c_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1,$$
$$c_1c_2c_3=a_1a_2a_3-b.$$

Эти же равенства можно переписать следующим образом:

$$(-a_1)+(-a_2)+(-a_3)=(-c_1)+(-c_2)+(-c_3),$$
$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1,$$
$$-a_1a_2a_3=-c_1c_2c_3-b,$$

из чего следует, что числа $-a_1$, $-a_2$ и $-a_3$ являются корнями уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)-b=0$.

Замечание. Если в первое уравнение подставить вместо x

числа c_1, c_2 и c_3, то из полученных трёх равенств $(c_1-a_1)(c_1-a_2)(c_1-a_3)=b$, $(c_2-a_1)(c_2-a_2)(c_2-a_3)=b$ и $(c_3-a_1)(c_3-a_2)(c_3-a_3)=b$ непосредственно не следует, например, что $(-a_1+c_1)(-a_1+c_2)(-a_1+c_3)=b$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 1 балл.

Алгебраические преобразования, не приведшие к обоснованию ответа — баллы не добавляются.

11.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах. (*В. Дольников*)

Решение. Предположим противное, и пусть в множестве всех школьников есть 30-элементные подмножества A_1, A_2, …, A_{50} (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех — пусто.

Пусть среди множеств A_1, A_2, …, A_{50} нашлись два множества B и C, имеющие $k \leqslant 28$ общих элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Для каждого элемента x_i среди множеств A_1, A_2, …, A_{50} найдём подмножество D_i, не содержащее x_i (такое подмножество D_i найдётся, иначе x_i — общий элемент множеств A_1, A_2, …, A_{50}). (Заметим, что среди подмножеств D_i могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств B, C, D_1, …, D_k — пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить еще несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остается пустым).

Значит, указанных двух множеств B и C не найдётся. Тогда пересечение любых двух из множеств A_1, A_2, …, A_{50} содержит в точности 29 элементов. Пусть $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, так что $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$. Найдём подмножество (пусть, для определенности, это подмножество — A_3), не содержащее y_1. Так как $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 29$, то A_3 обязано содержать все элементы $z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}$. Этих элементов 30 (все они различны), поэтому $A_3 = \{z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}\}$. Рассмотрим любое подмножество A_i из подмножеств $A_4, \ldots, A_{50}$. Предположим, что A_i содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда A_i должно пересекаться с каждым из подмножеств A_1, A_2, A_3 по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества K. Но $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$, значит, такого 29-элементного подмножества не существует — противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ являются подмножествами множества K. Но в множестве K количество 30-элементных подмножеств равно $31 < 50$. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда пересечение любых двух из множеств содержит в точности 29 элементов (а этот случай не разобран) — 3 балла.

11.4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1, 2)$. Если на доске написана пара чисел (a, b), то на доску можно дописать пару $(-a, -b)$, а также пару $(-b, a + b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a, b) и (c, d), то на доску можно дописать пару $(a + c, b + d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022, 2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1, 2)$ и $(2, 1)$ считаются различными. (*И. Почепцов*)

Ответ. Не могла.

Первое решение. Докажем, что для любой пары (x, y), записанной на доске, число $2x - y$ делится на 7.

Действительно, для пары $(1, 2)$ число $2 \cdot 1 - 1 = 0$ делится на 7.

Пусть для пары (a, b) число $2a - b$ делится на 7. Тогда для пары $(-a, -b)$ число $2 \cdot (-a) - (-b) = -(2a - b)$ делится на 7, и для пары $(-b, a + b)$ число $2 \cdot (-b) - (a + b) = -a - 3b = 3(2a - b) - 7a$ делится на 7.

Пусть для пар (a, b), (c, d) числа $2a - b$, $2c - d$ делятся на 7. Тогда для пары $(a + c, b + d)$ число $2(a + c) - (b + d) = (2a - b) + {} + (2c - d)$ делится на 7.

Так как для пары $(2022, 2023)$ число $2 \cdot 2022 - 2023 = 2021$ не делится на 7, эта пара на доске появиться не может.

Второе решение. Будем к каждой паре (a,b) на доске дописывать третье число $c=-a-b$. Тогда сумма чисел в каждой тройке будет равна нулю, а правила дописывания новых пар будут такими: если на доске записана тройка (a,b,c), то можно дописать тройки $(-a,-b,-c)$ и $(-b,-c,-a)$, а если записаны тройки (a,b,c) и (d,e,f), то можно дописать тройку $(a+d,b+e,c+f)$ — назовём эту тройку *суммой* троек (a,b,c) и (d,e,f). Также для тройки (a,b,c) и целого числа k обозначим через $k\cdot(a,b,c)$ тройку (ka,kb,kc).

Докажем, что все тройки, появляющиеся на доске, имеют вид

$$(a,b,c)=k\cdot(1,2,-3)+\ell\cdot(2,-3,1)+m\cdot(-3,1,2) \qquad (*)$$

с целыми k, ℓ и m. В начальный момент времени это верно: $(1,2,-3)=1\cdot(1,2,-3)+0\cdot(2,-3,1)+0\cdot(-3,1,2)$. Теперь достаточно показать, что из троек, имеющих вид $(*)$, также получаются лишь такие тройки. Для операции взятия суммы троек это очевидно. Для остальных операций это тоже несложно проверить: если (a,b,c) имеет вид $(*)$, то

$$(-a,-b,-c)=(-k)\cdot(1,2,-3)+(-\ell)\cdot(2,-3,1)+(-m)\cdot(-3,1,2),$$
$$(-b,-c,-a)=(-m)\cdot(1,2,-3)+(-k)\cdot(2,-3,1)+(-\ell)\cdot(-3,1,2).$$

Утверждение доказано.

Предположим теперь, что на доске появилась тройка $(2022,2023,-4045)$, то есть она имеет вид $(*)$. Тогда имеем

$$2022=k+2\ell-3m \quad \text{и} \quad 2023=2k-3\ell+m.$$

Выражая из первого равенства $k=2022-2\ell+3m$ и подставляя во второе, получаем $2023=2\cdot2022-7\ell+7m$, то есть $7(m-\ell)=$ $=2023-2\cdot2022=-2021$. Однако это невозможно, поскольку 2021 не делится на 7.

Замечание. Можно показать, что указанными операциями получаются *все* тройки, имеющие вид $(*)$. Также можно заметить, что $(-3,1,2)=-(1,2,-3)-(2,-3,1)$, так что в формуле $(*)$ можно обойтись без третьего слагаемого.

Аналогичное решение можно получить и без дописывания третьего числа к паре (однако оно будет выглядеть менее естественно). Именно, можно доказать, что все пары, появляющиеся на доске в исходном процессе, имеют вид

$$(a,b)=k\cdot(1,2)+\ell\cdot(2,-3) \qquad (**)$$

с целыми k и ℓ. Заметим здесь, что если пара (a,b) имеет вид $(**)$, то

$$(-b,a+b)=\ell\cdot(1,2)+(\ell-k)\cdot(2,-3).$$

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Сформулировано утверждение о том, что все получающиеся пары имеют вид $(**)$ — 1 балл.

Это утверждение доказано — ещё 3 балла.

Участник перешёл от пар чисел к тройкам (как во втором решении) — 1 балл.

После этого *замечено*, что все тройки представляются в виде $(*)$ — ещё 3 балла.

После перехода от пар к тройкам утверждение о представимости в виде $(*)$ принимается без доказательства.

11.5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, а также отмечен центр O его описанной окружности ω. Отрезки OH и AM пересекаются в точке D, прямые AB и CD — в точке E, прямые BD и AC — в точке F. Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y. Докажите, что прямые BY, CX и AH пересекаются в одной точке. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть P — такая точка на луче HE, что $PB\perp$ $\perp BC$ (см. рис. 7). Докажем, что точки C, O и P лежат на одной прямой.

В самом деле, по теореме Менелая для треугольника ADE и прямой CMB имеем $\frac{EC}{CD}\cdot\frac{DM}{MA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$. Поскольку прямые PB, AH и OM параллельны между собой (так как они все перпендикулярны прямой BC), имеем $AB/BE=HP/PE$, а также $DM/MA=DO/OH$. Значит, $\frac{EC}{CD}\cdot\frac{DO}{OH}\cdot\frac{HP}{PE}=1$, из чего следует, что точки C, O и P лежат на одной прямой по теореме Менелая для треугольника EDH. Значит, точка P диаметрально противоположна точке C в окружности ω. Аналогично, если Q — точка пересечения перпендикуляра к прямой BC, проходящего через точку C, и прямой HF, то точка Q диаметрально противо-

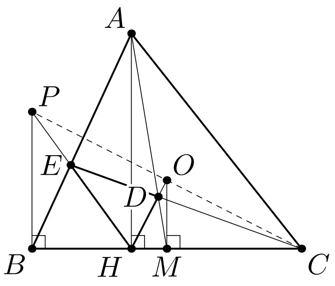

Рис. 7

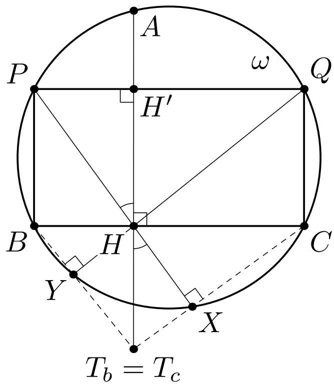

Рис. 8

положна точке B. Из этого следует, что $\angle EXC = \angle PXC = 90^\circ$, и, аналогично, $\angle FYB = \angle QYB = 90^\circ$.

Обозначим через H', T_b и T_c точки пересечения прямой AH соответственно с прямыми PQ, BY и CX (см. рис. 8). Заметим, что треугольники HXT_c и $HH'P$ подобны как прямоугольные с вертикальными острыми углами. Значит, $HT_c/HX = HP/HH'$, или $HT_c = HX \cdot HP/HH' = HB \cdot HC/HH'$. Аналогично, $HT_b = HB \cdot HC/HH'$. Значит, прямые BY и CX пересекают прямую AH в одной и той же точке, что и требовалось доказать.

Комментарий. Отмечены точки, диаметрально противоположные точкам B и C на окружности ω — 0 баллов.

Отмечены вторые точки пересечения прямых XH и YH с ω — 0 баллов.

Утверждается, но не доказывается, что вторые точки пересечения прямых XH и YH с ω — это точки, диаметрально противоположные вершинам B и C — 1 балл. Если это утверждение доказано — 3 балла.

Задача сведена к доказательству факта совпадения указанных точек, но совпадение не доказано — 4 балла.

Баллы за указанные продвижения не суммируются.