10 класс

10.1. В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами? (*А. Кузнецов, П. Кожевников*)

Ответ. Можно.

Решение. Один из многих возможных примеров показан на рисунке.

1	2	9	10	20	90	
1	2	0	0	0	0	3
0	0	4	0	0	0	4
0	0	5	0	0	0	5
0	0	0	10	20	0	30
0	0	0	0	0	40	40
0	0	0	0	0	50	50

Рис. 5

Комментарий. Только ответ, но не предъявлен пример — 0 баллов.

Неверное решение с неверным ответом — 0 баллов.

За отсутствие подсчёта сумм в правильном примере баллы не снижаются.

Если в примере какие-то суммы совпадают, но верно отмечены клетки, в которых можно делать операции — ставится 5 баллов из 7.

10.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)? (*Д. Храмцов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Многоугольник, у которого площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см), назовем *хорошим.*

Заметим, что исходный треугольник — хороший: он прямоугольный с катетами 5 см и 12 см, поэтому его площадь равна 30 см^2 и численно совпадает с его периметром, равным $5 + 12 + 13 = 30$ см.

Если какой-то многоугольник П разбит на хорошие многоугольники, то площадь П, равная сумме площадей всех многоугольников разбиения, совпала бы численно с суммой периметров многоугольников разбиения. Но сумма этих периметров больше периметра П (на удвоенную сумму длин общих частей границ многоугольников разбиения). Получаем, что площадь П больше его периметра.

Значит, никакой хороший многоугольник, в том числе данный треугольник, нельзя разрезать на несколько (больше одного) хороших многоугольников.

Комментарий. Только замечено, что исходный треугольник хороший — 1 балл.

Показано только, что хороший многоугольник не разбивается на хорошие — 5 баллов.

10.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах. (*В. Дольников*)

Решение. Предположим противное, и пусть в множестве всех школьников есть различные 30-элементные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех — пусто.

Пусть среди множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ нашлись два множества B и C, имеющие $k \leqslant 28$ общих элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Для каждого элемента x_i среди множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ найдём подмножество D_i, не содержащее x_i (такое подмножество D_i найдётся, иначе x_i — общий элемент множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$). (Заметим, что среди подмножеств D_i могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств B, C, $D_1, \ldots, D_k$ — пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить еще несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остается пустым).

Значит, указанных двух множеств B и C не найдётся. Тогда пересечение любых двух из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ содержит в точности 29 элементов. Пусть $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, так что $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$. Найдём подмножество (пусть, для определенности, это подмножество — A_3), не содержащее y_1. Так как $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 29$, то A_3 обязано содержать все элементы $z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}$. Этих элементов 30 (все они различны), поэтому $A_3 = \{z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}\}$. Рассмотрим любое подмножество A_i из подмножеств $A_4, \ldots, A_{50}$. Предположим, что A_i содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда A_i должно пересекаться с каждым из подмножеств A_1, A_2, A_3 по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества K. Но $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$, значит, такого 29-элементного подмножества не существует — противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ являются подмножествами множества K. Но в множестве K количество 30-элементных подмножеств равно $31 < 50$. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда пересечение любых двух из множеств содержит в точности 29 элементов (а этот случай не разобран) — 3 балла.

10.4. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a.

(*М. Антипов*)

Решение. Из условия следует, что $(abc+1) - (ab-b+1) = abc - ab + b = b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$. Заметим, что b и $ab - b + 1 = (a-1)b + 1$ взаимно просты, отсюда получаем, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$.

Далее замечаем, что $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1)$. Действительно, $2(ab-b+1) = (2a-2)b+2 > (2a-2)c+2 = ac+(a-2)c+2 \geqslant ac+2 > ac-a+1$. Значит, делимость $ac-a+1$ на $ab-b+1$ возможна только в случае равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$.

Имеем $a(c-1) = ac - a = ab - b = (a-1)b$. Видим, что $(a-1)b$ делится на a, но так как $a - 1$ и a взаимно просты, отсюда следует, что b делится на a, что и требовалось доказать.

Замечание. Приводить примеры чисел, удовлетворяющих условию, в решении не требуется. Но из решения несложно получить даже полное описание всех троек, удовлетворяющих условию: $(a, b, c) = (a, ma, (a-1)m+1)$, где $a > 1$, $m > 1$ — произвольные натуральные числа.

Комментарий. Доказано, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$ — 2 балла. В случае, если доказано, что $b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$, либо получены другие делимости, баллы не начисляются.

Доказано, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$, и далее доказано, что частное может равняться только 1, т.е. выведено равенство $ac - a + 1 = ab - b + 1$ — 5 баллов.

Доказано, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$, далее не доказано, что частное может равняться только 1, но верно рассмотрен случай равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$ — 3 балла.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность, описанную около треугольника BCD, в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180°$. (*М. Туревский, М. Дидин*)

Решение. Заметим, что $PQ \parallel CD$, так что PQ — средняя линия прямоугольного треугольника AHD. Значит, PQ пересекает гипотенузу AH в её середине M, так что $MA = MD = MH$ (см. рис. 6).

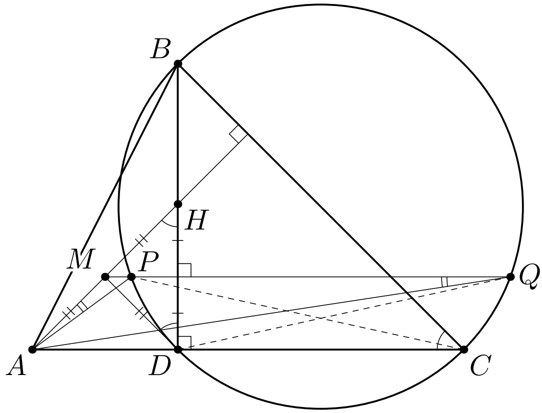

Рис. 6

Имеем $\angle MDH = \angle MHD$, а поскольку $MH \perp BC$ и $HD \perp CD$, имеем также $\angle MHD = \angle BCD$. Получаем равенство

$\angle MDH = \angle BCD$, из которого следует касание прямой MD и окружности (BCD) в точке D. Отсюда $MD^2 = MP \cdot MQ$ (по теореме о произведении отрезков секущей).

Далее, $MA^2 = MP \cdot MQ$. Значит, треугольники AMP и QMA подобны (угол AMQ общий и $MA/MP = MQ/MA$). Отсюда $\angle MQA = \angle MAP$, поэтому $\angle MPA + \angle MQA = \angle MPA + \angle MAP = \angle HMQ = 90^\circ - \angle MHD = \angle CBD$. Итак, $\angle APB + \angle AQB = \angle CBD$, и, поскольку $\angle APB + \angle AQB = (\angle MPA+\angle MQA)+(\angle MPB+\angle MQB)$, для завершения решения остаётся убедиться, что $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD$.

Для определённости далее считаем, что P лежит между M и Q. Имеем $\angle MPB+\angle MQB = 180^\circ-(\angle BPQ-\angle PQB)$. Так как $PQ \parallel CD$, то дуги PD и CQ равны, а значит, опирающиеся на них вписанные углы равны. Тогда $\angle BPQ - \angle PQB = \angle BDQ - \angle PCB = (\angle BDC - \angle QDC) - (\angle DCB - \angle DCP) = \angle BDC - \angle DCB = 90^\circ - \angle DCB = \angle CBD$, что завершает доказательство.

Замечание. Во второй части решения счёт углов можно провести разными способами. Попутно можно доказать, что H — это ортоцентр треугольника BPQ.

Комментарий. Доказано соотношение $MA^2 = MP \cdot MQ$ или, эквивалентно, подобие $AMP \sim QMA$ или, эквивалентно, найдена сумма $\angle MPA + \angle MQA = \angle CBD$ — 3 балла.

Проведён счёт углов, доказывающий равенство $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD$ или эквивалентное утверждение — 1 балл.