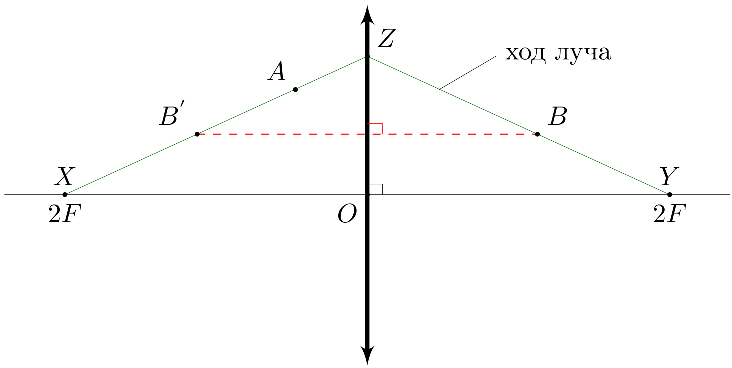
9 класс

Задача №9-Т1. Выцветшие фокусы линзы



Из рисунка видно, что линза собирающая, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{r},$$

где r — расстояние от изображения источника, которое находится тоже на главной оптической оси, до линзы.

Находим $r = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{2F}\right)^{-1} = 2F > 0$. Т.е. изображение находится на другой стороне от линзы на расстоянии $2F$ от неё — на том же расстоянии, что и источник.

Если X — источник, то Y — изображение источника. Если Y — источник, то X — его изображение.

$OX = OY \Rightarrow \triangle XYZ$ равнобедренный $\Rightarrow$ точка B', симметричная B относительно плоскости линзы, лежит на другой стороне $\triangle XYZ$ — стороне XZ.

Следовательно, следующий ряд построений отвечает на вопросы задачи:

1. Отражаем точку B относительно плоскости линзы и получаем точку B' (альтернативно можно так же поступить и с точкой A).
2. Проводим прямую AB'. Она пересекает главную оптическую ось в точке X. Получаем положение источника (или изображения) X на двойном фокусе.
3. Середина отрезка OX — первый фокус линзы.
4. Отражаем в плоскости линзы фокус, построенный в пункте 3 и получаем второй фокус.

Задача №9-Т2. Частицы в трубах

При движении от точки C до точки D между двумя встречами частица в кольцевой трубе совершает $N + \frac{1}{2}$ оборотов, где $N \geqslant 0$ — целое число. Это произошло за время

$$\Delta t = \frac{2\pi R(N + \frac{1}{2})}{v} = \frac{\pi R(2N+1)}{v}.$$

Пусть $x(t)$ — расстояние от первой частицы до точки A в момент времени t, где $x(0) = 0$. Тогда $x(t) = \frac{at^2}{2}$ и $t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$. Длины отрезков $|AC| = \frac{L}{2} - R$ и $|AD| = \frac{L}{2} + R$. Время движения частицы №1 от точки C до точки D равно

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(\sqrt{|AD|} - \sqrt{|AC|}\right) = \frac{\sqrt{L+2R} - \sqrt{L-2R}}{\sqrt{a}}$$

Получаем

$$\frac{\pi R(2N+1)}{v} = \frac{\sqrt{L+2R} - \sqrt{L-2R}}{\sqrt{a}}.$$

Откуда

$$v = \frac{\pi R(2N+1)\sqrt{a}}{\sqrt{L+2R} - \sqrt{L-2R}} = \frac{\pi(2N+1)(\sqrt{L+2R} + \sqrt{L-2R})\sqrt{a}}{4}$$

При $R = L/2$ имеем

$$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N+1)\sqrt{a}$$

При $R \ll L$ получаем

$$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N+1)\sqrt{a}$$

Задача №9-Т3. Гидростатический реостат

Перемещаясь, поршни задействуют разную длину проволок, соответственно, обеспечивают изменение сопротивления цепи. Это связано еще и с тем, что площади сосудов отличаются, иначе бы эффект не наблюдался. Дело в том, что при смещении большого поршня на Δh вниз, малый сместится на $3\Delta h$ вверх, и наоборот, когда большой поршень смещается на Δh вверх, малый сместится на $3\Delta h$ вниз.

Для удобства дальнейшей записи введем обозначение α для сопротивления одного метра проволоки. Тогда можно записать законы Ома для указанных в условии задачи положений поршней. Когда на поршнях нет грузов:

$$U = I_0(2\alpha h_0 + R_A),$$

когда груз на малом поршне:

$$U = I_1(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{2\rho S}),$$

когда груз на большом поршне:

$$U = I_2(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{2\rho S}).$$

Взяв разность двух последних уравнений, получаем

$$U(I_2 - I_1) = I_1 I_2 \frac{\alpha m}{\rho S}.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{U(I_2 - I_1)\rho S}{I_1 I_2 m} = 20 \text{ Ом/м}.$$

И, воспользовавшись первым законом Ома, получим ответ

$$R_A = \frac{U}{I_0 - 2\alpha H_0} = 1 \text{ Ом}$$

Из законов Ома для положений системы с грузами можно получить

$$U(I_1 + I_2) = 2I_1 I_2(2\alpha h_0 + R_A).$$

Учитывая закон Ома, когда нет поршней, получим

$$I_0 = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2.2 \text{ А}$$

Максимальный ток в цепи будет при минимальном сопротивлении, то есть, когда задействована минимальная длина проволок. Это произойдет в нижнем положении малого поршня:

$$I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 3.22 \text{ А}.$$

Минимальный ток напротив будет при максимальном сопротивлении, то есть, когда задействована наибольшая длина проволок. Это произойдет в верхнем положении малого поршня:

$$I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 1.67 \text{ А}.$$

Задача №9-Т4. Что так, что эдак

Ситуация, описанная в задаче, может произойти только при условии, что отлив воды в экспериментах происходит при одинаковой температуре. Действительно, при отливе вода забирает с собой часть тепла, переданного плиткой, равную $c\Delta m(t_x - t_0)$, где t_x — это температура, при которой воду выливают из кастрюли. А поскольку общее количество теплоты, переданное воде плиткой, в обоих случаях одинаково, то и t_x должно быть одинаковым. Найдем температуру, при которой происходит отлив воды во втором эксперименте:

$$t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 40\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Здесь и далее M — это масса воды в кастрюле в начале эксперимента (5 кг). Эту же температуру должна иметь вода в первом эксперименте через время $\tau_1 + \tau_2$ после его начала. Отсюда:

$$t_x = t_0 + \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(M + \Delta m)}.$$

Откуда

$$\Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M = 3\ \text{кг}.$$

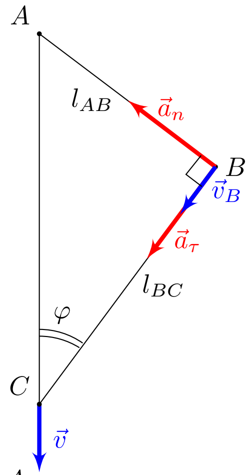
Тогда конечная температура в каждом из экспериментов:

$$t_\text{к} = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM} = 48\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Причем, для первого случая эта температура одновременно является максимально возможной по ходу всего эксперимента (поскольку она больше t_x). Во втором случае максимального значения температура может достигать либо в конце эксперимента, либо непосредственно перед доливом воды (через $\tau_1 + \tau_2$ от начала нагрева). При проверке выясняется, что реализовался второй сценарий:

$$t_{\max 2} = t_x + \frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)} = 70\ ^\circ\mathrm{C}$$

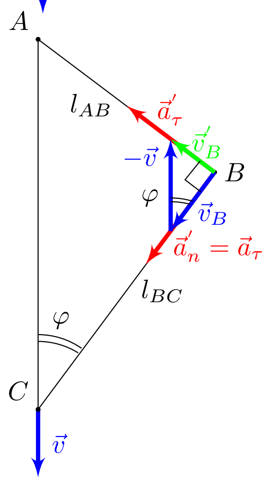
Задача №9-Т5. Движение по спице



Так как точка A закреплена, а нить AB натянута, то точка B движется по окружности с центром в точке A и радиусом l_{AB}. Следовательно, её скорость в рассматриваемый момент перпендикулярна радиусу окружности, то есть нити AB, и поэтому направлена вдоль нити BC, перпендикулярной нити AB. Найти скорость точки B можно двумя способами.

Первый способ: поскольку нить BC нерастяжима и натянута, то проекции скоростей точек B и C на неё равны. Проекция скорости точки C на нить BC равна $v\cos\varphi$, так что $v_B = v\cos\varphi$.

Второй способ: перейдем в систему отсчета точки C, то есть в поступательно движущуюся систему отсчёта, в которой точка C покоится. Скорости $\vec{v}_B$ и $\vec{v}'_B$ точки B в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением $\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_C$, где $\vec{v}_C$ — скорость точки C в исходной системе отсчёта. В новой системе отсчёта точка C покоится, нить BC натянута, так что точка B движется по окружности с центром в точке C и радиусом l_{BC}. При этом скорость точки B в новой системе отсчёта направлена перпендикулярно радиусу окружности — нити BC. Значит, скорости $\vec{v}_B$, $-\vec{v}$ и $\vec{v}_B - \vec{v} = \vec{v}'_B$ образуют прямоугольный треугольник с углом φ между $\vec{v}$ и $\vec{v}_B$, в котором $\vec{v}$ является гипотенузой. В таком случае $v_B = v\cos\varphi$.



$$v_B = v\cos\varphi = \frac{v\sqrt{3}}{2}$$

Теперь определим длину нити BC. Для этого перейдём в систему отсчёта точки C, в точности как в Варианте 2 в предыдущем пункте. Поскольку новая система отсчёта поступательно движется относительно исходной, то ускорения $\vec{a}_B$ и $\vec{a}'_B$ точки B в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением $\vec{a}_B = \vec{a}'_B + \vec{a}_C$, где $\vec{a}_C$ — ускорение точки C в исходной системе отсчёта. Так как точка B движется по окружности с центром в точке C в новой системе отсчёта, то её ускорение складывается из тангенциального ускорения $\vec{a}'_\tau$, направленного вдоль нити AB, и ортогонального ему нормального ускорения $\vec{a}'_n$, направленного к точке C вдоль нити BC. По условию в исходный момент $\vec{a}_C = 0$, так что $\vec{a}_B = \vec{a}'_B$. Также дано, что ускорение точки B, направленное вдоль нити BC, равно a_τ. Значит, нормальное ускорение точки B в новой системе отсчёта равно a_τ. С другой стороны, оно равно

$$\frac{(v_B')^2}{l_{BC}} = \frac{(v\sin\varphi)^2}{l_{BC}},$$

где равенство $v_B' = v\sin\varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника, образованного скоростями $\vec{v}_B$, $-\vec{v}$ и $\vec{v}_B'$. Таким образом,

$$a_\tau = \frac{(v\sin\varphi)^2}{l_{BC}} \quad \Longrightarrow \quad l_{BC} = \frac{v^2\sin^2\varphi}{a_\tau}.$$

$$l_{BC} = \frac{v^2\sin^2\varphi}{a_\tau} = \frac{v^2}{4a_\tau}$$

Определим полное ускорение точки B в исходной системе отсчёта. Поскольку в исходной системе отсчёта точка B движется по окружности с центром в точке A, то её полное ускорение складывается из двух ортогональных составляющих: тангенциального ускорения a_τ и нормального ускорения, направленного вдоль нити AB к точке A и равного

$$a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}} = \frac{v^2\cos^2\varphi}{l_{BC}\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \frac{a_\tau\cos^3\varphi}{\sin^3\varphi} = a_\tau\operatorname{ctg}^3\varphi.$$

Равенство $l_{AB} = l_{BC}\cdot\operatorname{tg}\varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника ABC. Полное ускорение точки B находим по теореме Пифагора

$$a_B = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_\tau\cdot\sqrt{1+\operatorname{ctg}^6\varphi} = 2\sqrt{7}a_\tau.$$