

8 класс Теоретический тур

Задача №8-Т1. По трубе

Перейдём в систему отсчёта, связанную с трубой. Скорость левого шарика будет равна $1.1V$. С учётом этого находим $\tau_1 = \frac{L}{1.1V} = \frac{10L}{11V}$.

Скорость правого шарика в системе отсчёта, связанной с трубой $1.9V$. Откуда $\tau_2 = \frac{L}{1.9V} = \frac{10L}{19V}$.

После соударения с торцевыми стенками трубы скорости шариков останутся такими же по модулю. К моменту времени τ левый шарик пройдет путь $L + l_1 = 1.1V\tau$. Путь, пройденный вторым шариком, к этому моменту равен $L + l_2 = 1.9V\tau$, причём $l_1 + l_2 = 2L$.

Из записанных соотношений определим время $\tau = \frac{4L}{3V}$.

Вернёмся в неподвижную систему отсчёта. Скорость левого шарика в ней будет равна $1.1V + 0.1V = 1.2V$, скорость правого шарика будет равна $1.9V - 0.1V = 1.8V$.

Таким образом $u_1 = 1.2V$, $u_2 = 1.8V$.

Задача №8-Т2. Изогнутая трубка

Согласно условию: $p_0 = \rho g 10h = 10\rho gh$. Полное давление в жидкости: $p = p_{\text{внешнее}} + p_{\text{гидростатическое}}$. Пройдём по трубке от левой свободной поверхности к правой:

$$0.8p_0 + 4\rho g 2h - \rho g 3h + k\rho g 4h - 3\rho g 3h = p_0.$$

С учётом первого уравнения получаем $k = 1.5$.

Т.к. давление на левый свободный уровень увеличится, то он опустится. Значит правый свободный уровень поднимется на ту же величину. Если считать смещение равным s , то

$$p_0 + 4\rho g(2h - 2s) - \rho g(3h - 2s) + 1.5\rho g 4h - 3\rho g(3h + 2s) = p_0.$$

Отсюда $s = h/6$.

Задача №8-Т3. Туда-сюда

С учётом того, что теплопотери и теплоёмкостью кастрюли можно пренебречь, мощность плитки можно определить как $N = cm\Delta t/\Delta\tau$, где c — удельная теплоёмкость воды, m — масса воды (объёмом 5 литров, $m = \rho V = 5 \text{ кг}$), Δt — изменение температуры, $\Delta\tau$ — время, за которое это изменение произошло.

Так как в период с момента времени τ_1 до момента времени τ_2 масса воды в кастрюле равна m , температура изменилась с t_1 до t_2 , то $N = \frac{cm(t_2 - t_1)}{\tau_2 - \tau_1} = 1.75$ кДж.

Если по ходу нагрева масса воды в кастрюле не меняется, то не меняется скорость нагрева $\Delta t / \Delta \tau = 5$ °С/мин. Значит конечная температура равна $t_k = t_0 + 10\tau_0 \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = 70$ °С ($\tau_0 = 1$ мин).

Пусть масса добавляемой воды в процессе эксперимента Δm . К моменту времени $8\tau_0$ нагреватель выделит количество теплоты $N8\tau_0$. Оно равно сумме количества теплоты $cm(t_{45} - t_0)$, полученного водой массой m (оставшейся в сосуде после выливания) и количества теплоты $c\Delta m(t_x - t_0)$, полученного водой массой Δm . Т.е.

$$8N\tau_0 = cm(t_{45} - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0),$$

где $t_{45} = 45$ °С, t_x — температура воды в момент её забора. Причём $t_x < t_{45}$.

С учётом этого и вышеприведенных уравнений получаем

$$\Delta m = \frac{m}{t_x - t_0} \left(8\tau_0 \frac{t_2 - t_1}{\tau_2 - \tau_1} - t_{45} + t_0 \right).$$

Из данного соотношения видно, что Δm принимает минимальное значение при максимально возможном значении $t_x = 45$ °С. Откуда $m_{\min} = 3$ кг.

Пусть τ — время, когда происходил забор воды из кастрюли. Исходя из того, что объём кастрюли 10 л, максимальная масса добавляемой воды может быть равна $m = 5$ кг.

Тепло, выделившееся на нагревателе к моменту времени τ :

$$N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0).$$

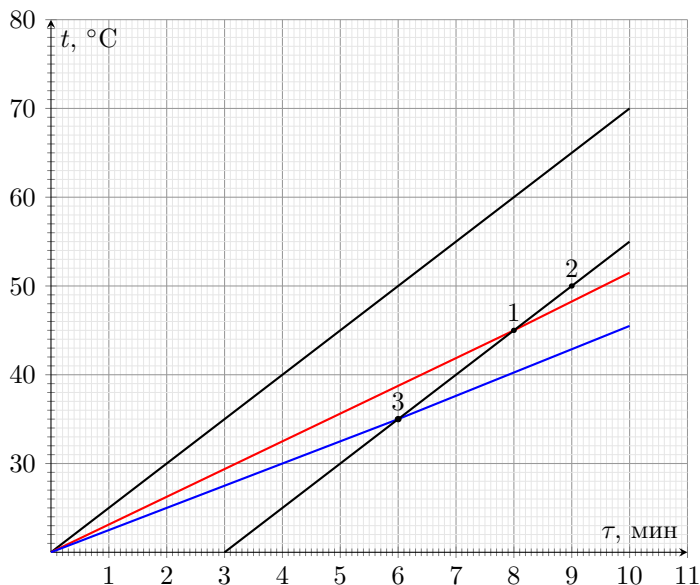
С учётом этого и соотношений для мощности плитки, выделяемой за время $8\tau_0$ получаем:

$$\tau = \frac{c(m + \Delta m)}{N} \frac{8N\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{c\Delta m} = \left(\frac{m}{\Delta m} + 1 \right) \cdot \frac{8\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{N}.$$

Откуда видно, что $\tau = \tau_{\min} = 6$ мин. при $\Delta m = \Delta m_{\max} = m$.

Также можно решать эту задачу графически в системе координат «время-температура». График процесса нагрева в этих координатах будет состоять из трех отрезков прямых: первый — до долива (масса воды в кастрюле $m = 5$ кг), второй — после долива (масса воды в кастрюле $m + \Delta m$) и третий — после забора воды (масса воды в кастрюле m).

Возьмем известные нам точки 1 и 2 и проведем через них прямую. На этой прямой лежит отрезок графика, соответствующий третьему участку. Учитывая, что масса воды на третьем и первом участке одинакова, прямые, на которых



они лежат, должны быть параллельны, так как мощность нагрева постоянна. Проведем прямую, параллельную нашей и проходящую через начало координат (время — 0 мин, температура — 20 °С). Именно на этой прямой лежит график первого участка. По ней также можно определить температуру t_k , которую имела бы вода в кастрюле, если бы её масса не менялась со временем. Температура, соответствующая 10 минутам и есть искомая $t_k = 70$ °С.

По наклону этой прямой можно также определить мощность плитки $N = \frac{cm\Delta t}{\Delta\tau} = 1.75$ кВт.

Когда в кастрюлю доливают воду, масса в ней увеличивается, а температура уменьшается. Поскольку изменение температуры происходит мгновенно, график перескакивает на прямую, имеющую наклон, соответствующий новой массе, и проходящую через начало координат. Чем масса больше, тем более полого пойдет прямая. А её пересечение с прямой третьего участка даст момент забора воды.

Поскольку кастрюля десятилитровая, больше 5 литров долить в неё невозможно. Этому случаю соответствует нижняя (голубая) прямая. Именно она пересекается с прямой третьего участка раньше любой другой возможной (в точке 3, соответствующей $\tau_{\min} = 6$ минут).

В то же время, второй участок не может пересечься с третьим позже точки 1, которой соответствует минимальная добавочная масса $m_{\min} = 3$ кг.

Задача №8-Т4. Ползущий рельс

Для начала определимся с тем, как будут меняться во времени силы реакции опор (которые численно равны показаниям динамометров). Очевидно, что центр масс рельса на старте находится между опорами. Пусть x — это расстояние от левой опоры до центра масс в начальный момент времени, F_1 и F_2 — показания левого и правого динамометров соответственно. Тогда через время t получим:

$$F_1 l = Mg(l - x - vt);$$

$$F_2 l = Mg(x + vt).$$

Откуда:

$$F_1(t) = Mg - \frac{Mgx}{l} - \frac{Mgv}{l}t;$$

$$F_2(t) = \frac{Mgx}{l} + \frac{Mgv}{l}t.$$

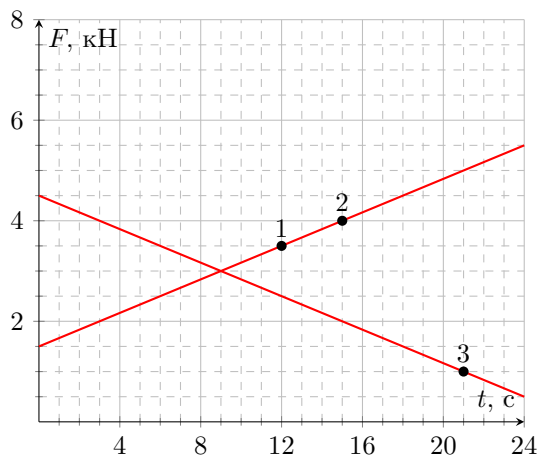
Видно, что в обоих случаях зависимость линейная. В первом — убывающая, а во втором — возрастающая, причем коэффициенты при t отличаются только знаком. Кроме того, в любой момент времени $F_1 + F_2 = Mg$.

Очевидно, что из трех точек какие-то 2 принадлежат одному графику, а оставшаяся — другому. Возможны три варианта. Однако точки 2 и 3, также как точки 1 и 3 не могут лежать на одной прямой. В этом случае второй график пересечет ось X позже, чем начнется движение (а такого быть не может — рельс бы опрокинулся еще до старта).

Покажем это аналитически. Предположим, что точки 2 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -0.5 \frac{H}{c}t + 11,5$ Н. В момент времени $t_1 = 12$ с из графика находим $F_2(t_1) = 3,5$ Н, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_1) = 5,5$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ с находим $F_1(t_0) = 11,5$ Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -2,5$ Н < 0 . Значит, наше предположение неверно.

Предположим теперь, что точки 1 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -\frac{5}{18} \frac{H}{c}t + \frac{41}{6}$ Н. В момент времени $t_2 = 15$ с из графика находим $F_2(t_2) = 4$ Н, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_2) = \frac{8}{3}$ Н $\approx 2,67$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ с находим $F_1(t_0) \frac{41}{6}$ Н $\approx 6,83$ Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -\frac{1}{6}$ Н $\approx -0,17$ Н < 0 . Следовательно, это предположение тоже неверно.

Значит, одному графику принадлежат точки 1 и 2. Тогда графики должны выглядеть так:



Сразу оговоримся, что поведение графиков нам точно известно только до 21-й секунды. Время движения рельса будет зависеть от его длины.

По графикам не сложно определить, что $Mg = 6 \text{ кН}$. Откуда $M = 600 \text{ кг}$. Если мысленно продлить графики до пересечения с осью X , то можно заметить, что расстояние l рельс проехал бы за 36 секунд. Значит его скорость — 0.25 м/с .

Что же касается минимальной длины рельса, то при её оценке мы можем отталкиваться только от известных нам крайних положений. В начальный момент времени расстояние от центра масс до дальней (правой) опоры — 6.75 м . А в последний доподлинно известный нам момент (точка 3) расстояние от центра масс до дальней (левой) опоры — 7.5 м . Откуда можно сделать вывод, что длина рельса не меньше $L_{\min} = 15 \text{ м}$.