

10 класс

Задача №10-Е1. Внутренний объем трубки

Для начала увеличим точность шкалы шприца объемом 20 мл, для этого приклеим к нему бумажную шкалу, совместив 0 шкалы шприца с основным делением бумажной шкалы. Определим цену деления приклеенной шкалы используя деления 0 и 20 мл на шкале шприца. При дальнейших измерениях будем пользоваться наклеенной шкалой. Выдвинем поршень шприца 20 мл до отметки V_1 . Поршень шприца 5 мл вдвинем до упора в крайнее положение. Обратите внимание, что при перемещении поршня этого шприца в крайнее положение ощущается (даже слышен!) легкий толчок («щелчок»). Он объясняется тем, что в этом месте внутренний диаметр шприца на небольшом участке немного увеличен и поршень как бы «фиксируется» в этом положении. Для того, чтобы начать выдвигать поршень из этой точки, необходимо приложить некоторое «избыточное» усилие, которое как следует из дальнейших экспериментов с хорошей точностью является постоянным. Соединим шприцы с помощью прозрачной трубки, плотно надев ее на носик каждого шприца. Начнем плавно вдвигать поршень большого шприца до момента, когда поршень малого шприца под действием избыточного давления в трубке «выскочит» из крайнего положения и тоже придет в движение. Определим объем V_2 большого шприца, при котором это происходит. Пусть поршень в малом шприце приходит в движение при давлении в трубке, превышающем атмосферное давление P_0 на величину ΔP . Тогда по закону Бойля-Мариотта

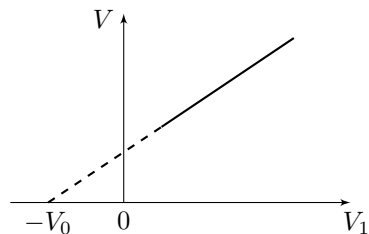
$$P_0(V_1 + V_0) = (P_0 + \Delta P)(V_2 + V_0).$$

Здесь за V_0 обозначен внутренний объем трубки. После преобразований

$$V_1 - V_2 = \frac{\Delta P}{P_0 + \Delta P}(V_1 + V_0).$$

Если теоретическая модель верна, то при построении графика зависимости величины $\Delta V = V_1 - V_2$ от V_1 мы должны получить линейную зависимость, причем продолжение прямой $\Delta V(V_1)$ будет пересекать ось V_1 в точке $V_1 = -V_0$ (см. рисунок).

Для повышения точности каждый опыт проведем три раза с последующим усреднением результатов.

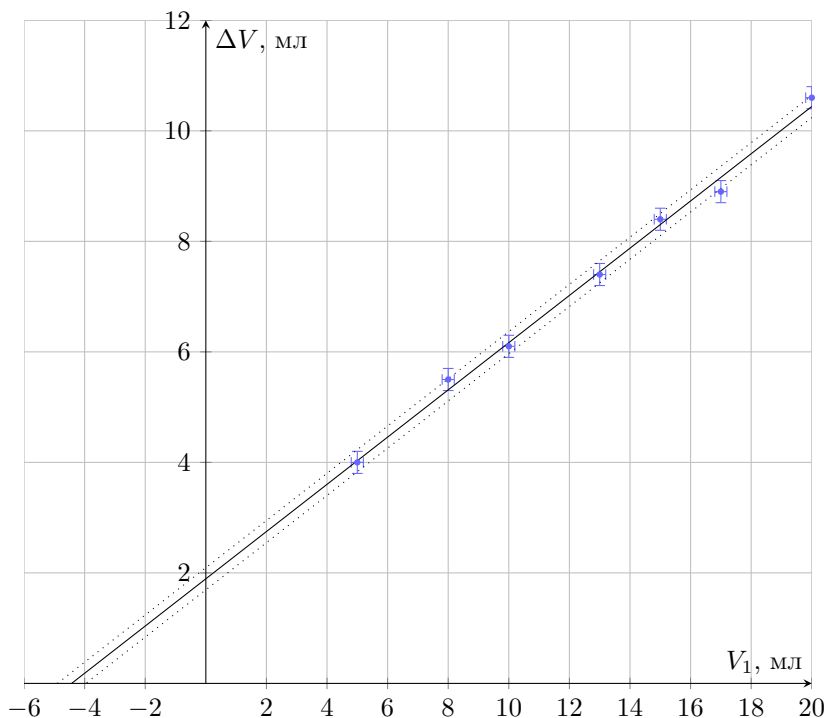


$$\Delta V_{\text{ср}} = V_1 - \frac{V_{2_1} + V_{2_2} + V_{2_3}}{3}$$

Экспериментальные данные

V_1 , мл	V_{21} , мл	V_{22} , мл	V_{23} , мл	$\Delta V_{\text{ср}}$, мл
20.0	9.5	9.3	9.5	10.6
17.0	8.0	8.2	8.0	8.9
15.0	6.5	6.5	6.7	8.4
13.0	5.7	5.5	5.5	7.4
10.0	4.0	3.7	4.0	6.1
8.0	2.5	2.5	2.5	5.5
5.0	1.0	1.0	1.0	4.0

График $\Delta V_{\text{ср}}(V_1)$.



Продолжение графика до пересечения с осью абсцисс позволяет определить значение $V_0 \approx 4.5$ мл.

Оценим погрешность. Погрешность измерения объема равна цене деления $\Delta V \approx 0.2$ мл. Из серии измерений видно, что разброс значений укладывается в приборную погрешность, то есть $\Delta V_{\text{приб}} \approx \Delta V_{\text{случ}}$.

Тогда

$$\Delta V_{\text{полн}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta V_{\text{приб}}}{3}\right)^2 + \Delta V_{\text{случ}}^2} \approx \Delta V_{\text{приб}} = 0.2 \text{ мл}$$

Для оценки погрешности V_0 проведем две вспомогательные прямые, проходящие через края крестов ошибок и показывающие допустимое отклонение в V_0 .

$$\Delta V_0 = \frac{V_{0\text{макс}} - V_{0\text{мин}}}{2} = \frac{5.0 - 3.8}{2} = 0.6 \text{ мл}$$

Окончательный результат $V_0 = (4.5 \pm 0.6) \text{ мл}$.

Задача №10-Е2. Серый ящик

Для начала найдем сопротивления 3, 5 и 6 резисторов. Для этого сделаем следующие опыты:

- Измерим сопротивление R_a между замкнутыми точками **БД** и замкнутыми точками **ВГ**. Полученная цепь представляет параллельное соединение 3 и 5 резисторов, поэтому $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}$.
- Измерим сопротивление R_6 между замкнутыми точками **БГ** и точкой **В**. Полученная цепь представляет параллельное соединение 3 и 6 резисторов, поэтому $\frac{1}{R_6} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}$.
- Измерим сопротивление R_b между замкнутыми точками **ВД** и точкой **Г**. Полученная цепь представляет параллельное соединение 5 и 6 резисторов, поэтому $\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$. Из первых трех опытов получим:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_b} \right),$$

откуда найдем R_3 , аналогично найдем R_5

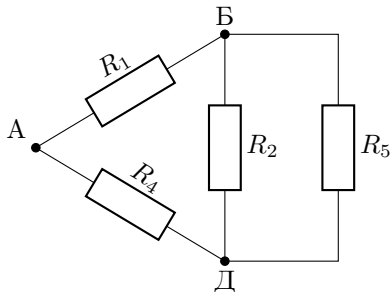
$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_6} \right)$$

и R_6

$$\frac{1}{R_6} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_6} - \frac{1}{R_a} \right).$$

- Теперь соединим вместе точки **Б**, **В** и **Г**. Получим треугольник из резисторов, две стороны треугольника представлены резисторами 1 и 4, а третья — параллельным соединением резисторов 2 и 5. Важно выбрать именно такой вариант, так как измеряя сопротивления между различными парами

выводов можно определить, что сопротивления резисторов 1, 2 и 4 заметно меньше остальных. Для повышения точности к резистору 2 нужно присоединить параллельно максимально сравнимый с ним, то есть обладающий наименьшим сопротивлением из оставшихся. Получим эквивалентную схему:



Дополнительно соединим точки **Б** и **Д** и измерим сопротивление R_x между ними и точкой **А**.

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1}$$

- Вместо **Б** и **Д** соединим **Б** и **А** и измерим сопротивление R_y между ними и точкой **Д**.

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}$$

- Вместо **Б** и **А** соединим **Д** и **А** и измерим сопротивление R_z между ними и точкой **Б**.

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}$$

- Теперь можно вычислить оставшиеся сопротивления.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_y} \right),$$

аналогично

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_z} \right)$$

и

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_z} + \frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x} \right) - \frac{1}{R_5}.$$

- Для определения какие выводы нужно соединить, чтобы получить 167 Ом, рассчитаем для каждого резистора величину обратную его сопротивлению и посмотрим какие из них дают в сумме $\frac{1}{167}$ Ом⁻¹. Из полученных значений следует, что идеально подходят R_1 и R_2 . То есть требуется соединить точки **А**, **В**, **Г** и **Д** и измерять сопротивление между ними и точкой **Б**. Также можно заметить, что число очень близкое к 167 Ом, мы получили при измерении R_z .
- Оценим погрешность. Погрешность измеряемых сопротивлений составляет 1%, тогда и погрешность величин, обратных к измеренным сопротивлениям тоже составляет 1%. Вычислим абсолютные погрешности величин $1/R$ по формуле $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\varepsilon(R)}{R}$. При сложении величин складываются их абсолютные погрешности, поэтому

$$\Delta\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{2} \left(\Delta\left(\frac{1}{R_x}\right) + \Delta\left(\frac{1}{R_y}\right) + \Delta\left(\frac{1}{R_z}\right) \right).$$

Тогда $\varepsilon(R_1) = \varepsilon\left(\frac{1}{R_1}\right) = \Delta\left(\frac{1}{R_1}\right) R_1$, соответственно $\Delta(R_1) = \Delta\left(\frac{1}{R_1}\right) R_1^2$. Для остальных сопротивлений погрешность вычисляется аналогично.

Измерения и расчеты (Авторские значение могут отличаться от выданного вам оборудования).

Что измеряли	Значение, кОм	R^{-1} , кОм ⁻¹	$\Delta(R^{-1})$, кОм ⁻¹
R_a	12.53	0.0798	0.000798
R_b	24.9	0.0402	0.000402
R_b	16.69	0.0599	0.000599
R_x	0.1239	8.0710	0.080710
R_y	0.242	4.1322	0.041322
R_z	0.1645	6.0790	0.060790

Что вычислили	Значение, кОм	ΔR , кОм	Ответ, кОм
R_1	0.199	0.004	0.199 ± 0.004
R_2	0.979	0.09	0.98 ± 0.09
R_3	33.5	1.0	34 ± 1
R_4	0.326	0.01	0.33 ± 0.01
R_5	20.5	0.4	20.5 ± 0.4
R_6	97.1	8	97 ± 8

Как видно из таблицы наименьшим сопротивлением обладает первый резистор.