Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2022 – 2023 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2022 – 2023 учебном году 9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. *По вазам разложили* 60 *яблок и* 60 *персиков так, что во всех вазах оказалось поровну яблок, но в любых двух вазах — разное число персиков (возможно, что в одной из ваз персиков нет совсем). Какое наибольшее число ваз могло быть использовано? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть использовано n ваз. Упорядочим их по количеству персиков в вазе. В первой вазе не менее 0 персиков, во второй — не менее 1, в третьей — не менее 2 и так до последней, в которой не менее $n-1$ персика. Из неравенства

$$0+1+2+\ldots+(n-1) \leqslant 60$$

находим, что $n \leqslant 11$. Так как яблок во всех вазах поровну, то n — делитель числа 60. Наибольшее число, удовлетворяющее этим условиям — число 10. Пример для 10 ваз: в каждой лежит по 6 яблок, в первых 9 вазах лежит 0, 1, 2, 3, и так до 8 персиков, в последней 24 персика ровно (распределение персиков по вазам может быть и другим).

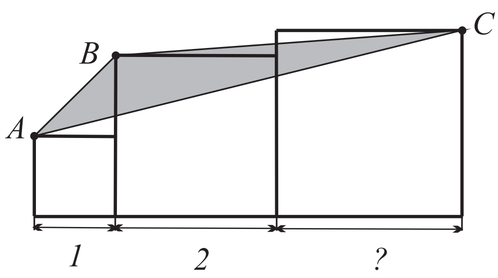
Ответ: 10.

Примечание: Если замечание насчёт возможного существования вазы, не содержащей персиков, проигнорировать, то точная оценка (10) получается немедленно из требования насчёт разного числа персиков в вазах. Примеры распределения персиков по 10 вазам в этом случае также строятся, например,

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+15.$$

Рекомендации по проверке:

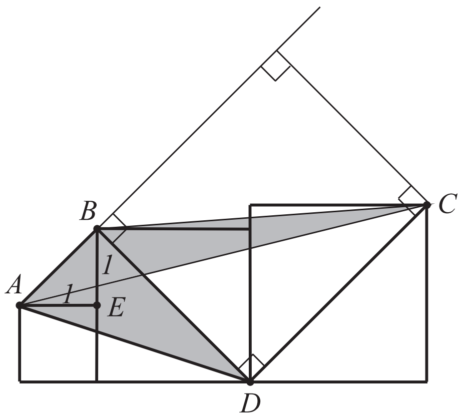
есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При оценке наибольшего числа ваз не учтено, что в одной из ваз персиков может не оказаться. В остальном решение верное	6 баллов
Доказано, что больше 10 ваз быть не может, но нет ни примера, ни иного обоснования того, что 10 ваз может быть	4 балла
Имеется верный пример для 10 ваз	1 балл
Любые примеры для количества ваз, меньшего 10	0 баллов



К условию задачи 9.2

9.2. *На плоскости расположено три квадрата так, как указано на рисунке. Длина стороны левого квадрата равна 1 см, длина стороны среднего — 2 см, о длине стороны правого квадрата ничего неизвестно. Докажите, что площадь треугольника ABC не зависит от размера правого квадрата и найдите её.*

Решение: Пусть D — общая вершина среднего и правого квадрата. Проведём через неё прямую под углом 45° к сторонам правого квадрата. Какой бы ни была сторона этого квадрата, проведённая прямая будет содержать его диагональ, значит, пройдёт через вершину C (см. рисунок).



К решению задачи 9.2

Так как треугольник ABE — равнобедренный и прямоугольный, $\angle BAE = 45^\circ$ и отрезок AB параллелен проведённой прямой (они равнонаклонены к горизонтали). Значит, вне зависимости от размера правого квадрата точки C и D равноудалены от прямой AB, следовательно, $S_{ABC} = S_{ABD}$ и не зависит от положения точки C на прямой. Остаётся заметить, что треугольник ABD прямоугольный с прямым углом B, откуда $S_{ABD} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BD = 2$.

Ответ: 2.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство и верно найденная площадь	7 баллов
Доказательство верно, а площадь найдена неверно из-за арифметической ошибки	6 баллов
Верно установлено геометрическое место вершины C и найдена площадь треугольника в частных случаях	4 балла
Верно установлено геометрическое место вершины C	3 балла
Верно найдена площадь треугольника в частных случаях, а доказательство общего случая неверно или отсутствует	1 балл
Рассуждения и выкладки, из которых не виден ход доказательства	0 баллов

9.3. *Решите систему неравенств*

$$\begin{cases} 4x^2 - 2xy + 7y^2 \leqslant 1, \\ 2x - 5y \geqslant 2. \end{cases}$$

Решение: Пусть $2x - 5y = a$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} (a+5y)^2 - (a+5y)y + 7y^2 & \leqslant & 1, \\ a & \geqslant & 2, \\ x & = & \dfrac{a+5y}{2}. \end{cases}$$

Преобразуем первое неравенство системы:

$$a^2 + 10ay + 25y^2 - ay - 5y^2 + 7y^2 - 1 \leqslant 0,$$
$$a^2 + 9ay + 27y^2 - 1 \leqslant 0.$$

Пусть $z = 3y$, тогда

$$3z^2 + 3az + a^2 - 1 \leqslant 0,$$
$$z^2 + az + \frac{a^2-1}{3} \leqslant 0,$$
$$\left(z + \frac{a}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^2}{4} - \frac{a^2-1}{3},$$
$$\left(z + \frac{a}{2}\right)^2 \leqslant \frac{4-a^2}{12}.$$

Отсюда $4 - a^2 \geqslant 0$, то есть $-2 \leqslant a \leqslant 2$. Сопоставляя этот результат с вторым неравенством системы, получаем, что $a = 2$. Тогда $(z+1)^2 \leqslant 0$. Отсюда

$$z = -1, \quad y = -\frac{1}{3}, \quad x = \frac{a+5y}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{6}$; $y = -\dfrac{1}{3}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное решение системы	7 баллов
Найдена пара $x = 1/6$, $y = -1/3$	1 балл
Выкладки, из которых ход решения не просматривается	0 баллов

9.4. *Из точки A за пределами окружности проведены к ней две касательные AB и AC. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и AC, не пересекает эту окружность.*

Решение: Пусть M и N — середины отрезков AB и AC соответственно; O — центр окружности, R — её радиус. Треугольник AOB — прямоугольный, OM — его медиана. Проведём OK — биссектрису угла AOB (точка K лежит на стороне AB. По свойству биссектрисы $\frac{AK}{KB} = \frac{AO}{OB}$. Так как гипотенуза AO больше катета OB, это отношение больше 1, то есть $AK > KB$ и точка K лежит между точками M и B. Проведём из точки K прямую, параллельную BC, и пусть она пересекает отрезок AO в точке T. Так как $BC \perp AO$, $\angle KTO$ — прямой, и тогда треугольники KTO и KBO равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $OT = OB = R$, то есть точка T лежит на пересечении окружности и отрезка AO. Так как $AO \perp KT$, прямая KT — касательная к окружности. Тогда вся окружность лежит в той полуплоскости относительно KT, которая содержит точку B. Прямая MN, будучи параллельной BC, а, следовательно, и KT, также лежит в одной полуплоскости, в той, в которой лежит точка M. Значит, прямая MN не пересекается с окружностью, ч. т. д.

Примечание: Хотя в указанном выше доказательстве было аккуратно показано, что точка K лежит между точками M и B, при проверке работ такой факт считать требующим не доказательства, а лишь аккуратной ссылки, например: в прямоугольном треугольнике биссектриса, проведенная из острого угла, ближе к катету, чем к гипотенузе.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Доказаны посторонние утверждения, которые не помогают провести доказательство	0 баллов

9.5. *Проезжая в автобусе мимо кинотеатра, ученик успел заметить только часы (но не минуты) начала четырёх сеансов:* 1*-й сеанс:* 11 *часов* … *минут,* 2*-й сеанс:* 12 *часов* … *минут,* 7*-й сеанс:* 22 *часа* … *минут,* 8*-й сеанс:* 23 *часа* … *минут. Определите самое позднее возможное время начала первого сеанса, если известно, что сеансы идут без перерывов и начинаются в целое число минут соответствующего часа. Предполагается, что продолжительность каждого из восьми сеансов одинакова.*

Решение: Очевидно, что сеанс идёт больше часа (иначе все 8 сеансов завершились бы задолго до $23-00$), но меньше двух часов (иначе уже первые 6 сеансов завершились бы позже этого времени). Пусть сеанс идёт 1 час x минут ($0 < x < 60$). Кроме того, пусть первый сеанс начинается в 11 часов y минут. Тогда второй сеанс начнётся в 12 час $x+y$ минут, седьмой — в $11+6$ часов $6x+y$ минут, а восьмой — в $11+7$ часов $7x+y$ минут. Условие задачи, следовательно, записывается системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant & x+y & < 60, \\ 22\cdot 60 \leqslant & 17\cdot 60+6x+y & < 23\cdot 60, \\ 23\cdot 60 \leqslant & 18\cdot 60+7x+y & < 24\cdot 60. \end{cases}$$

в которой числа x и y — целые, лежащие на отрезке $[0;\ 59]$. Два двойных последних неравенства перепишем в виде

$$5\cdot 60-5x \leqslant x+y < 6\cdot 60-5x$$

и

$$5\cdot 60-6x \leqslant x+y < 6\cdot 60-6x.$$

Так как $300-6x < 300-5x$, а $240-6x < 240-5x$, система этих двух неравенств эквивалентна одному двойному:

$$300-5x \leqslant x+y < 360-6x.$$

С учётом первого неравенства системы получаем $300-5x < 60$, откуда $x > 48$. Так как x — число целое, $x \geqslant 49$. Тогда, снова из первого неравенства системы, получаем, что $y < 11$. Так как y — целое, то $y \leqslant 10$. При $y = 10$, $x = 49$ все неравенства системы выполнены,

Ответ: 11 часов 10 минут.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, которые, возможно, привели к неверному ответу	6 баллов
Обосновано, что первый сеанс начинается не позже 11-10, но не показано, что он может начаться в 11-10	5 баллов
Условие задачи верно записано с помощью системы неравенств	3 балла
Верный ответ подкреплён верным примером (указано расписание всех восьми сеансов)	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Примеры, когда первый сеанс начинается раньше 11-10	0 баллов

9.6. *Вычислите без калькулятора*

$$\frac{(10^4+324)\cdot(22^4+324)\cdot(34^4+324)\cdot(46^4+324)\cdot(58^4+324)}{(4^4+324)\cdot(16^4+324)\cdot(28^4+324)\cdot(40^4+324)\cdot(52^4+324)}.$$

Решение: Каждая из скобок имеет вид

$$a^4+18^2=(a^4+2a^2\cdot 18+18^2)-2a^2\cdot 18=$$
$$=(a^2+18)^2-36a^2=(a^2-6a+18)(a^2+6a+18).$$

Если разбить дробь на произведение пяти дробей вида

$$\frac{(a+6)^4+18^2}{a^4+18^2}$$

(a принимает последовательно значения 4, 16, 28, 40, 52), то, так как

$$(a+6)^2-6(a+6)+18=a^2+6a+18,$$

каждая дробь сократится и приведётся к виду

$$\frac{(a+6)^2+6(a+6)+18}{a^2-6a+18}=\frac{a^2+18a+90}{a^2-6a+18}.$$

Следующая дробь получится из предыдущей увеличением числа a на 12. Получится дробь

$$\frac{a^2+24a+144+18a+216+90}{a^2+24a+144-6a-72+18}=\frac{a^2+42a+450}{a^2+18a+90}.$$

Знаменатель этой дроби равен числителю предыдущей, поэтому при умножении дробей все такие числа будут сокращены. Останется от первой дроби знаменатель, от последней – числитель. То есть получится

$$\frac{52^2+18\cdot 52+90}{4^2-6\cdot 4+18}=\frac{2704+936+90}{16-24+18}=\frac{3730}{10}=373.$$

Ответ: 373.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
В верном решении присутствуют арифметические ошибки	снять 1 балл за каждую ошибку
Выражение представлено в виде произведения пяти дробей и каждая из дробей верно сокращена	4 балла
Выражение вида a^4+18^2 разложено на два множителя	3 балла
Попытки вычислить выражение непосредственно, если к ответу они не привели ИЛИ в решении допущены алгебраические ошибки	0 баллов