Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2022 – 2023 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2022 – 2023 учебном году

8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. *В некотором месяце было пять понедельников, в следующем — пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором все это было? Ответ обоснуйте.*

Решение: Обозначим месяц, в котором было пять понедельников, через a, следующий за ним (в котором пять вторников) — через b, следующий (с пятью средами) через c. Заметим, что если в некотором месяце 5 понедельников (аналогично вторников или сред), то на понедельники (вторники, среды) приходятся либо числа 1, 8, 15, 22, 29, либо 2, 9, 16, 23, 30, либо 3, 10, 17, 24, 31 (последнее, если в месяце 31 день). Если понедельник не окажется последним днём месяца a, то первый вторник b случится не раньше, чем 5-го числа этого месяца, и тогда в b вторников будет 4. Противоречие. Значит, последний день a — понедельник, а первый день b — вторник. Тогда пятый вторник месяца b наступит 29-го числа. Аналогично, чтобы в месяце c было 5 сред, последний день b должен быть вторником. Но тогда в месяце b 29 дней. Это возможно только в случае, если b — февраль високосного года. Итак, в феврале вторниками были числа 1, 8, 15, 22, 29; эти же числа были средами в марте. А в январе понедельниками были числа 3, 10, 17, 24, 31. Значит, 2 января было воскресенье, а первого — суббота.

Ответ: В субботу.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обоснованно и верно определён день недели какого-нибудь другого дня (день недели для 1 января определён неверно)	6 баллов
Доказано, что в не високосном году описанная ситуация невозможна	5 баллов
Задача решена для случая первых трёх месяцев года (ситуации, когда речь идёт о другой тройке месяцев, не рассмотрены)	2 балла
Верный ответ, подкреплённый конкретным примером (достаточно месяцев с января по март)	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.2. *В финале первенства Университета по игре в «Брэйн-ринг» приняли участие 4 команды. По правилам каждая команда сыграла с каждой дважды, за победу в бою начислялось 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Известно, что команда «Крестики» набрала очков больше, чем любая другая команда, а именно 7. А у команды «Нолики» очков меньше всех. А сколько именно? Приведите все варианты ответа и докажите что других нет.*

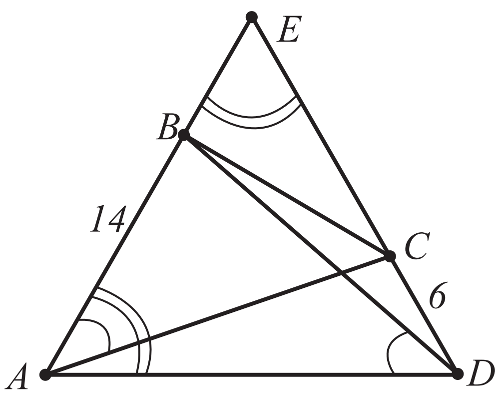
Решение: Всего было сыграно 12 матчей; в каждом разыгрывалось два очка. Значит, общее число очков, набранных командами, 24. «Крестики» набрали 7 очков, поэтому остальные три команды в сумме набрали 17 очков. При этом ни одна из этих команд не могла получить больше 6 очков. Поэтому, если хотя бы две команды набрали не более 5 очков, то все три команды набрали не больше 16, что не так. Значит, две из трёх команд набрали больше 5 очков, то есть по 6. Тогда оставшаяся команда набрала 5 очков, меньше всех, следовательно, она и есть команда «Нолики».

Ответ: 5 очков.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ (пример таблицы, когда «Нолики» набрали 5 очков НЕ ТРЕБУЕТСЯ)	7 баллов
Доказано, что три худшие команды в сумме набрали 17 очков	4 балла
Имеется пример, показывающий, что «Нолики» могли набрать 5 очков	1 балл
Ответ в отсутствии примера или с примером, не удовлетворяющим условию задачи	0 баллов
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.3. *Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$ и $\angle BAC = \angle BDA$. Найдите длину AD, если известно, что $AB = 14$, $CD = 6$.*



К решению задачи 8.3

Решение: Продолжим стороны AB и DC до их пересечения в точке E (см. рисунок). В треугольнике ADE два угла по 60°, значит, этот треугольник равносторонний. Рассмотрим треугольники ABD и ACE. Имеем равенства $AD = AE$, $\angle BAD = \angle CEA = 60^\circ$, $\angle BDA = \angle EAC$. Таким образом, эти треугольники равны. Значит, $AB = EC = 14$, а тогда

$$AD = DE = DC + EC = 6 + 14 = 20.$$

Ответ: 20.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное решение	7 баллов
Четырёхугольник достроен до правильного треугольника ADE и рассмотрены треугольники ABD и ACE	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.4. *Пусть*

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{3}{2}.$$

Какие значения может принимать сумма

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}?$$

Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть

$$\frac{1}{x-y}=a, \quad \frac{1}{y-z}=b, \quad \frac{1}{z-x}=c.$$

Тогда нам надо найти, какие значения может принимать выражение $a^2+b^2+c^2$. При этом известно, что

$$a+b+c=\frac{3}{2}.$$

Возведём обе части этого уравнения в квадрат — получим уравнение-следствие

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=\frac{9}{4}. \tag{1}$$

Кроме того, легко увидеть, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$$

Умножим обе части последнего равенства на abc (что допустимо, так как ни одна из введённых переменных не равна нулю), после чего получим равносильное равенство $bc+ca+ab=0$. Подставим это равенство в уравнение (1) и получим

$$a^2+b^2+c^2=\frac{9}{4}.$$

Так как в процессе решения имел место переход к следствию, необходимо проверить, что число $\frac{9}{4}$ может быть получено. Для примера годится любая тройка чисел, удовлетворяющих условию, например $x=3$, $y=2$, $z=1$.

Ответ: $\dfrac{9}{4}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Обоснованно получен верный ответ и приведена хотя бы одна тройка удовлетворяющих условию чисел a, b, c	7 баллов
Доказано, что ответом может быть только число $\frac{9}{4}$, но не показано, что это число возможно (нет примеров троек a, b, c, удовлетворяющих уравнению из условия)	6 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	5 баллов
Число $9/4$ получено на конкретном примере тройки a, b, c чисел, удовлетворяющих уравнению	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.5. *Дано* 10 *натуральных чисел. Из десяти всевозможных сумм по* 9 *чисел различных всего девять:* 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95. *Найдите эти числа. Приведите все возможные наборы и докажите, что других нет.*

Решение:

Способ 1. Пусть x — недостающая десятая сумма; по условию она равна какой-то из данных. Пусть, кроме того, S — сумма всех десяти чисел, а сами числа при этом равны a_i ($1 \leqslant i \leqslant 10$). Можно считать, что

$$S - a_1 = 86, \quad S - a_2 = 87, \quad \ldots, \quad S - a_9 = 95, \quad S - a_{10} = x.$$

Сложив левые и правые части всех десяти уравнений, и приняв во внимание, что $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$, получаем равенство

$$9S = x + (86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 93 + 94 + 95).$$

Число в правой части, следовательно, кратно 9. Остатки от деления на 9 слагаемых в скобке — суть числа 5, 6, 7, 8, 0, 1, 3, 4, 5, их сумма 39. Значит, x при делении на 9 даёт в остатке 6, поэтому $x = 87$. Тогда

$$S = \frac{86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 93 + 94 + 95 + 87}{9} = 100,$$

а сами числа равны 14, 13, 13, 12, 11, 10, 9, 7, 6 и 5.

Способ 2. Для удобства счёта уменьшим все числа набора на 10; тогда все данные суммы уменьшатся на 90 и станут равными -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4 и 5. Недостающая сумма (пусть она x) также будет равна одному из этих чисел, в частности, $-4 \leqslant x \leqslant 5$. Просуммируем все 10 сумм, получим $x + 3$. С другой стороны в эту сумму десяти сумм каждое из чисел входит ровно 9 раз, поэтому она обязана делится на 9. Единственное число из отрезка $[-4; 5]$, удовлетворяющее этому условию — число -3. Итак, $x = -3$. Тогда общая сумма всех чисел равна

$$(-4-3-3-2-1+0+1+2+3+4+5):9=0,$$

а сами числа равны 4, 3, 3, 2, 1, 0, -1, -3, -4 и -5. Вспоминая, что мы в начале решения уменьшили все числа на 10, получаем единственный ответ.

Ответ: 14, 13, 13, 12, 11, 10, 9, 7, 6 и 5.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный ответ с обоснованием его единственности	7 баллов
При верном в целом решении имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Задача верно сведена к уравнению в целых числах, которое не решено	3 балла
Верно указаны все 10 чисел и осуществлена проверка, что их набор удовлетворяет условию задачи	2 балла
Верный ответ без доказательства его единственности и без проверки, что набор удовлетворяет условию задачи	1 балл
Рассуждения и выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

8.6. *Серёжа коллекционирует игрушечные железные дороги. У него есть несколько наборов, в каждом из которых разное количество вагонов. Если все его наборы объединить в один состав, то в нем будет* 112 *вагонов. Если взять три самых маленьких набора, то в них будет* 25 *вагонов, а в трёх самых больших —* 50 *вагонов. Сколько наборов у Серёжи? Сколько вагонов в самом большом наборе? Ответы обоснуйте.*

Решение: Так как $25 + 50 = 75 < 112$, то, помимо шести наборов, о которых говорится в условии, у Серёжи есть ещё несколько (назовём эти наборы средними), при этом в этих наборах в сумме $112 - 75 = 37$ вагонов. Сумма вагонов в трёх самых маленьких наборах равна 25, поэтому наибольший из них содержит не менее 9 вагонов. Аналогично, сумма вагонов в трёх самых больших наборах равна 50, поэтому в самом маленьком из них не больше 15 вагонов $(16 + 17 + 18 > 50)$. Количество вагонов в каждом из средних наборов, следовательно, лежит в диапазоне от 10 до 14. Двумя числами из этого диапазона 37 не получить, максимум $13 + 14 = 27$. Четырьмя получим не меньше $10 + 11 + 12 + 13 = 46 > 37$. Итак, средних наборов 3, а всего наборов 9. При этом 37 можно получить только двумя способами: $14 + 13 + 10$ и $14 + 12 + 11$. В обоих случаях максимальный из средних наборов содержит 14 вагонов ровно. Тогда рассмотрим три самых больших набора. В них 50 вагонов, и в каждом не меньше 15. Значит, в наименьшем из них ровно 15, а в двух наибольших в сумме 35. Для количества вагонов в двух наибольших наборах возможны две ситуации; 16 и 19 или 17 и 18. Значит, в наибольшем наборе 18 или 19 вагонов.

Ответ: 9 наборов; в наибольшем из них либо 18, либо 19 вагонов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и обоснованный ответ на оба вопроса задачи	7 баллов
Задача верно решена в предположении (не доказанном), что у Серёжи больше 6 наборов	6 баллов
Верно обосновано, что количество наборов равно 9, а из двух возможных значений количества вагонов в наибольшем наборе найдено только одно	5 баллов
Верно обосновано, что количество наборов равно 9	4 балла
Верный ответ на оба пункта, подкреплённый двумя примерами (с разным числом вагонов в наибольшем наборе) ИЛИ доказано, что количество наборов больше 6	2 балла
Приведён один из верных примеров числа вагонов во всех наборов; при этом утеряна ситуация другого количества вагонов в наибольшем наборе	1 балл
Ответы без обоснования	0 баллов