# Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2022 – 2023 учебном году

## Ответы и решения

## Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2022 – 2023 учебном году**

**7 класс**

*Время выполнения заданий — 4 часа*

**7.1.** *Женя и Антон учатся в одном классе. У Антона одноклассников вчетверо больше, чем одноклассниц. А у Жени одноклассниц на 17 меньше, чем одноклассников. Кто Женя: девочка или мальчик? Ответ обоснуйте.*

**Решение:**

Способ 1. Предположим, что Женя — мальчик. Тогда у него одноклассников и одноклассниц столько же, сколько и у Антона, то есть первых вчетверо больше, чем вторых. Но тогда разность между количеством одноклассников и одноклассниц (она по условию равна 17) должна делится на 3, что неверно.

Способ 2. Пусть в классе $x$ девочек. Все они — одноклассницы Антона, поэтому одноклассников у Антона $4x$, а всего мальчиков в классе $4x + 1$. Если Женя — мальчик, то получаем уравнение $4x - x = 17$, которое не имеет целых корней. Ситуация противоречива; Женя не мальчик.

**Ответ:** Женя — девочка.

**Примечание:** Девочкой Женя может оказаться. Это будет в случае, когда в классе 5 девочек и 21 мальчик: у девочки Жени тогда 4 одноклассницы и 21 одноклассник, а у мальчика Антона — 5 одноклассниц и 20 одноклассников. Можно доказать, что пример класса единственен: составляя уравнение, как в способе 2, получим, что у Жени — девочки $x - 1$ одноклассница и $4x + 1$ одноклассник, $4x + 1 - (x - 1) = 17$, откуда $x = 5$.

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верный обоснованный ответ (достаточно доказать, что Женя не может быть мальчиком) | 7 баллов |
| Верно составлено уравнение в каждом из предположений «Женя — девочка» и «Женя — мальчик» | 5 баллов |
| Верно составлено уравнение в одном из предположений «Женя — девочка» или «Женя — мальчик» | 4 балла |
| Приведён пример, показывающий, что Женя может быть девочкой | 3 балла |
| Ответ без обоснования или с неверным обоснованием | 0 баллов |

**7.2.** *Учебник стоит целое число рублей, кратное* 10. *Первому школьнику не хватает* 10 *рублей для покупки учебника, второму — 20 рублей, и так до десятого, которому не хватает* 100 *рублей. Тогда они решили сложить все деньги и купить хотя бы* 5 *учебников. Но и тогда денег не хватило. Сколько стоит учебник?*

**Решение:**

Способ 1. Добавим первому ученику 10 рублей, второму — 20 и так до десятого, которому добавим 100 рублей. Тогда денег хватит на 10 учебников. Так как имеющихся денег не хватает на 5 учебников, то добавленная сумма больше чем цена $10 : 2 = 5$ учебников. Мы добавили $10+20+\ldots+100 = 550$ рублей, поэтому учебник стоит меньше 110 рублей, а в силу кратности 10, не больше, чем 100 рублей. Меньше 100 рублей он стоить не может, так как последнему ученику 100 рублей не хватает. Значит, цена учебника — 100 рублей ровно.

Способ 2. Пусть цена учебника $10x$ руб. Тогда у первого школьника в точности $10x - 10$ руб, у второго — ровно $10x - 20$ руб и так до десятого, у которого $10x - 100$ руб ровно. В сумме у учеников $100x - 550$ руб, что меньше стоимости пяти учебников, откуда $100x - 550 < 50x$. Тогда $x < 11$, а, будучи целым числом, $x \leqslant 10$. Но у последнего школьника не может быть отрицательной суммы денег, поэтому $10x - 100 \geqslant 0$, откуда $x \geqslant 10$. Значит, $x = 10$, а цена учебника равна $10 \cdot 10 = 100$.

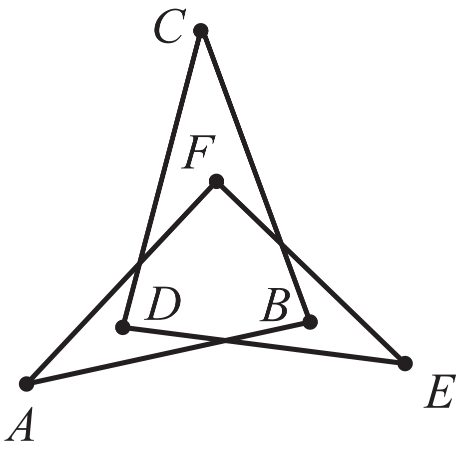
**Ответ:** Цена учебника 100 рублей.

*Рекомендации по проверке:*

| **есть в работе** | **баллы** |
|---|---|
| Верный обоснованный ответ | 7 баллов |
| Обосновано, что учебник стоит не больше 100 руб | 4 балла |
| Обосновано, что учебник стоит меньше 110 руб | 3 балла |
| Верный ответ без обоснования его единственности, но с проверкой, что учебник может стоить 100 рублей ИЛИ замечено, что учебник стоит не меньше 100 рублей | 1 балл |
| Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием | 0 баллов |

**7.3.** *Расставьте на плоскости шесть точек таким образом, что если соединить отрезками первую точку со второй, вторую — с третьей и т. д., а шестую — с первой, то каждый из шести проведённых отрезков пересекает (во внутренней точке) ровно один другой отрезок.*

**Решение:** См. рисунок.



К решению задачи 7.3

*Рекомендации по проверке:*

| есть в работе | баллы |
|---|---|
| Верно расставлены точки и проведены нужные 6 отрезков (или указан верный порядок их соединения) | 7 баллов |
| Нужная расстановка точек отсутствует | 0 баллов |

**7.4.** *а) Покажите, что каждое из чисел* $3\cdot 0^2+14=14$ *и* $3\cdot 1^4+14=17$ *может быть представлено в виде суммы квадратов трёх различных целых чисел.*

*б) Верно ли, что для любого целого числа n число* $3n^4+14$ *может быть представлено в виде суммы квадратов трёх различных целых чисел? Ответ обоснуйте.*

**Решение:** Решим сразу пункт «б». Выполним равносильные преобразования:

$$3n^4+14=(n^4+1)+(n^4+4)+(n^4+9)=$$
$$=(n^4+2n^2+1)-2n^2+(n^4+4n^2+4)-4n^2+(n^4-6n^2+9)+6n^2=$$
$$=(n^2+1)^2+(n^2+2)^2+(n^2-3)^2.$$

Остаётся заметить, что числа $n^2+1$, $n^2+2$ и $n^2-3$ — целые и различные.

Теперь представления для чисел из пункта «а» очевидны:

$$14=1^2+2^2+3^2;\qquad 17=2^2+3^2+(-2)^2.$$

**Ответ:** Верно.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

| **есть в работе** | **баллы** |
|---|---|
| Показано в общем случае представление числа $3n^4+14$ в виде суммы квадратов трёх целых чисел | 7 баллов |
| Верно решён пункт «а» | 2 балла |
| Найдено верное представление для одного из чисел 14 или 17 | 1 балл |
| Ответ на вопрос пункта «б» обоснован неверно или не обоснован и требуемое представление чисел 14 и 17 отсутствует | 0 баллов |

**7.5.** *У дракона есть* 40 *кучек золотых монет, в любых двух кучках число монет разное. После того, как дракон разграбил соседний город и принес ещё золотых монет, количество монет в каждой кучке увеличилось либо в* 2*, либо в* 3*, либо в* 4 *раза. Какое наименьшее количество разных (по количеству монет) кучек могло получиться? Ответ обоснуйте.*

**Решение:** По принципу Дирихле найдутся 14 кучек, количество монет в которых увеличилось в одно и то же число раз. Так как изначально в них монет было разное количество, разное количество в них и останется.

Приведём пример, когда разных кучек останется ровно 14. Выберем 14 различных простых чисел, каждое из которых больше 3: $p_1, p_2, \ldots, p_{14}$, и пусть изначально у дракона были такие кучки монет: $3p_1, 3p_2, \ldots, 3p_{13}, 4p_1, 4p_2, \ldots, 4p_{13}, 6p_1, 6p_2, \ldots, 6p_{13}, 6p_{14}$. Пусть количество монет в первых тринадцати кучках увеличилось в 4 раза, в следующих тринадцати — в три раза, в последних четырнадцати — в 2 раза. Легко убедиться, что условие задачи выполнено, и что в итоге получатся кучки с числом монет $12p_i$. Различных из них ровно 14.

**Ответ:** 14 кучек.

**Примечание:** Допустимо считать, что одна из кучек монет была пустой (содержала 0 монет) и такой же пустой осталась.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

| **есть в работе** | **баллы** |
|---|---|
| Верный обоснованный ответ | 7 баллов |
| Приведён верный пример для 14 кучек (доказательство, что меньше нельзя, неверно или отсутствует) | 5 баллов |
| Обосновано, что различных кучек не может оказаться меньше 14 (верного примера для 14 различных кучек нет) | 2 балла |
| Ответ без обоснования и/или примеры для числа кучек, большего 14 | 0 баллов |

**7.6.** *В мешке лежат карточки с четырьмя буквами А, Т, О, М, по одной букве на карточке. Общее количество карточек 26. Известно, что карточек с буквой Т меньше, чем с буквой О, а карточек с буквой О меньше, чем с буквой М. Из мешка не глядя извлекают несколько карточек и из букв на извлечённых карточках составляют слова. Чтобы гарантированно можно было собрать слово «АТОМ», нужно вытащить минимум 22 карточки; чтобы слово «ТОМ» — 21 карточку, а чтобы слово «ОМ» — 20 карточек. Сколько карточек каждого вида в мешке? Ответ обоснуйте.*

**Решение:**

Способ 1. По условию существует такой набор из 21 карточки, из букв которого слово «АТОМ» собрать нельзя. Но слово «ТОМ» из букв этого набора собрать можно, значит, в этом наборе отсутствует буква «А». Так как при добавлении к набору её одной любой карточки получится набор, из которого слово «АТОМ» уже собирается, все остальные $26 - 21$ карточка содержат букву «А». Итак, карточек с буквой «А» ровно 5. Аналогично, из информации про слова «ТОМ» и «ОМ» находим, что карточек с буквой «Т» ровно 6. На остальные буквы приходятся $26 - 5 - 6 = 15$ карточек, при этом карточек с каждой из букв «О» и «М» больше 6. Значит, одна из этих двух букв встречается 7 раз, вторая — 8. Так как карточек с буквой «О» меньше, чем с буквой «М», получаем единственный ответ.

Способ 2. Так как при извлечении 22 букв слово «АТОМ» получается обязательно, то каждая буква встречается более $26 - 22 = 4$ раз. Так как можно извлечь 21 карточку так, что слово «АТОМ» не соберётся, какой-то из букв не больше $26 - 21 = 5$. Это не может быть буква М, О или Т, так как иначе может случится, что вытащив 21 карточку мы не соберём слово ТОМ. Итак, в наборе ровно 5 букв А. Аналогично рассуждая, находим, что буквы М, О и Т встречаются не менее 6 раз каждая; при этом одна из них ровно 6 раз. И это не буквы О и М (иначе может оказаться, что на вытащенных 20 карточках одной из них не будет; не сложится набор ОМ. Значит, в наборе ровно 6 букв Т. Букв О и М в сумме 15, значит, букв О меньше половины от этого числа, то есть не более 7. Но их больше, чем букв Т, то есть больше 6. Значит, в наборе 7 букв О и 8 букв М.

**Ответ:** 5 букв А, 6 букв Т, 7 букв О и 8 букв М.

*Рекомендации по проверке:*

| **есть в работе** | **баллы** |
|---|---|
| Верный обоснованный ответ | 7 баллов |
| Найдено и верно обосновано количество карточек с каким-то двумя буквами и приведён верный ответ количества двух других букв | 5 баллов |
| Найдено и верно обосновано количество карточек с какими-то двумя буквами | 4 балла |
| Приведён верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи | 3 балла |
| Найдено и верно обосновано количество карточек с какой-то одной буквой (например, только с буквой «А») | 2 балла |
| Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием) | 1 балл |
| Рассуждения и выкладки, не ведущие к решению | 0 баллов |