Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2022 – 2023 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2022 – 2023 учебном году
6 класс
Время выполнения заданий — 4 часа

6.1. *Валера считает, что два арбуза тяжелее трех дынь, а Серёжа — что три арбуза тяжелее четырёх дынь. Известно, что один мальчик прав, а второй — нет. Верно ли, что 12 арбузов тяжелее 18 дынь? Считается, что все арбузы весят одинаково, и все дыни тоже весят одинаково. Ответ обоснуйте.*

Решение: Заметим, что $12 : 18 = 2 : 3$, поэтому если Валера прав, то 12 арбузов тяжелее 18 дынь,а если неправ — то это не так. Следовательно, надо установить, прав ли Валера. Заметим, что кто бы из мальчиков ни сказал правду, арбуз точно тяжелее дыни. Тогда если Валера прав, то добавив к двум арбузам арбуз (более тяжёлый, чем дыня), а трём дыням — дыню, получим, что прав и Серёжа. Противоречие с тем, что прав только один мальчик. Значит, Валера неправ, и 12 арбузов не тяжелее 18 дынь.

Ответ: Неверно.

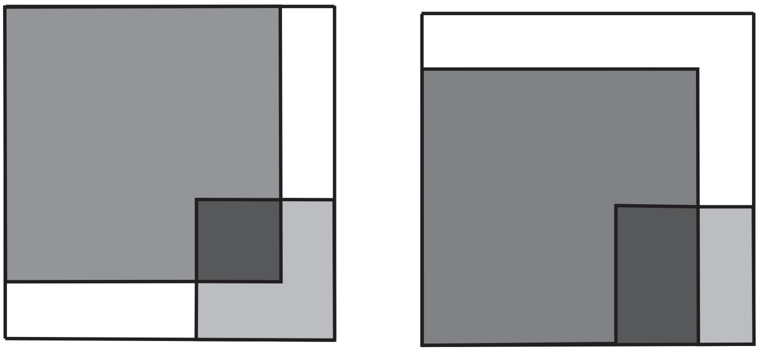
<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Показано, что если прав Валера, то прав и Серёжа, то есть показано, что Валера не прав	4 балла
Показано, что вопрос задачи эквивалентен вопросу «Прав ли Валера?»	2 балла
Показано (например, на примере), что 18 дынь может оказаться тяжелее 12 арбузов	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

6.2. *В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли участок зала площадью 4 м^2, а когда их положили в соседние углы, то они в два слоя накрыли участок зала площадью 14 м^2. Каковы размеры зала? Ответ обоснуйте.*

Решение: При размещении ковров в противоположных углах они в два слоя покрывают квадрат K в центре зала — рисунок слева; его площадь 4 м^2, значит, сторона равна 2 м.

При размещении ковров в соседних углах в два слоя накроется прямоугольник, одна из сторон которого равна стороне меньшего ковра, а вторая — стороне



К решению задачи 6.2

квадрата K — рисунок справа. Тогда сторона меньшего ковра равна $14 : 2 = 7$, сторона большего ковра равна $7 \cdot 2 = 14$, а сторона зала равна $7 + 14 - 2 = 19$ метров.

Ответ: Размеры зала 19 на 19 метров.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения ответ неверен из-за арифметической ошибки	6 баллов
Верно найдены размеры прямоугольника, образованного пересечением ковров, лежащих в соседних углах зала	3 балла
Верно найден размер квадрата, образованного пересечением ковров, лежащих в противоположных углах зала	1 балл
Ответ без обоснования	0 баллов

6.3. *У Вики было четыре ромашки: с* 31 *лепестком, с* 32 *лепестками, с* 33 *лепестками и с* 34 *лепестками. Она оборвала* 20 *лепестков. Могло ли получиться так, что количество лепестков на ромашках стало равным? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Количество лепестков на всех ромашках сначала (пока лепестки не обрывались) было равным $31 + 32 + 33 + 34 = 130$, после обрывания 20 лепестков оно стало равным $130 - 20 = 110$. Так как число 110 не делится нацело на 4, невозможно, чтобы на всех ромашках лепестков осталось поровну.

Способ 2. Чтобы уравнять число лепестков, Вика должна оборвать минимум один лепесток со второй ромашки, два — с третьей и три — с четвёртой. Будем считать, что она именно с этого и начала. Тогда ей останется оборвать 14 лепестков. Так как 14 не кратно 4, то с каких-то двух ромашек будет оторвано разное количество лепестков. Поэтому число лепестков равным оказаться не может.

Способ 3. Пусть Вика оборвала с первой ромашки x лепестков, со второй — y лепестков, с третьей и четвёртой — z и t лепестков соответственно. По условию $x+y+z+t=20$. Если в итоге количество лепестков на всех ромашках уравнялось, то имеет место соотношение:

$$31-x=32-y=33-z=34-t.$$

Выразим все переменные, например, через x:

$$y=x+1; \qquad z=x+2; \qquad t=x+3.$$

Тогда

$$x+y+z+t=x+x+1+x+2+x+3=4x+6=20,$$

откуда $x=3{,}5$ — число не целое. Значит, предположение о равенстве количества лепестков приводит к противоречию.

Ответ: Нет, это невозможно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При решении верно составленного уравнения (системы уравнений) допущены арифметические ошибки	6 баллов
Условие задачи верно записано с помощью уравнения (системы уравнений)	4 балла
Попытка (не приведшая к решению) рассмотреть остатки от деления на 4	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

6.4. *В таблицу 3×3 расставили 9 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 20. Затем перемножили числа в каждой строке и в каждом столбце. Могло ли оказаться, что все шесть таких произведений — квадраты натуральных чисел (не обязательно различных)? Ответ обоснуйте.*

Решение: Например, так:

5	10	2	100
15	20	3	900
12	8	6	576
900	1600	36	

Ответ: Могло.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный пример таблицы	7 баллов
Ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

6.5. *У фальшивомонетчика* 100 *внешне одинаковых монет, среди которых ровно* 2 *фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, а каждая из фальшивых на* 1 *грамм легче каждой из настоящих. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах отобрать*

а) 25 *настоящих монет;*

б) 33 *настоящие монеты?*

Решение: Если мы положим на обе чаши весов поровну монет и какая-то из чаш перевесит, то на этой чаше фальшивых монет меньше, чем на другой. Так как фальшивых монет на весах не больше двух, то на более тяжёлой чаше фальшивых монет нет, а на более лёгкой точно есть, только неясно одна или две. Отсюда решение.

а) Первым взвешиванием кладём на каждую из чаш по 50 монет. Если весы не в равновесии, то 50 монет на более тяжёлой чаше — настоящие. Нам хватило одного взвешивания для нахождения даже 50 настоящих монет. Пусть весы в равновесии. Тогда на каждой из чаш по одной фальшивой монете. Содержимое одной из чаш полностью убираем, а монеты второй чаши делим поровну (по 25) и вторым взвешиванием сравниваем веса полученных групп. Так как фальшивая монета на весах одна, равновесие невозможно, и 25 монет на перевесившей чаше — настоящие.

б) Первое взвешивание: Взвесили по 33 монеты. (остальные 34 пока отложили в сторону — это резерв). Возможно два случая:

Случай 1. Одна чаша перевесила, значит, все монеты на ней настоящие; мы за одно взвешивание нашли 33 настоящие монеты.

Случай 2. Весы в равновесии. Значит, либо на каждой чаше по одной фальшивой монете, либо обе фальшивые монеты лежат в резерве. Тогда вторым взвешиванием сравниваем содержимое одной из чаш с какими-нибудь 33 монетами из резерва. Если одна из чаш перевесила — 33 настоящие монеты найдены (они на этой чаше). А равновесие невозможно, так как фальшивые монеты не могут оказаться на разных чашах весов и хотя бы одна фальшивая монета на весах точно есть.

Ответ: Один из возможных алгоритмов описан в решении.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Приведён верный алгоритм для пункта «Б» (а тогда и для обоих пунктов) и доказано, что он гарантирует нахождение 33 настоящих монет	7 баллов
Приведён верный алгоритм для пункта «Б» (а тогда и для обоих пунктов), но доказательство его правильности неполно или отсутствует	6 баллов
Приведён верный алгоритм для решения пункта «а»	3 балла
Доказано, что если на чашах поровну монет, а весы не в равновесии, то все монеты на более тяжёлой чаше — настоящие	2 балла
Неверные алгоритмы (в любом количестве)	0 баллов