Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2022 – 2023 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

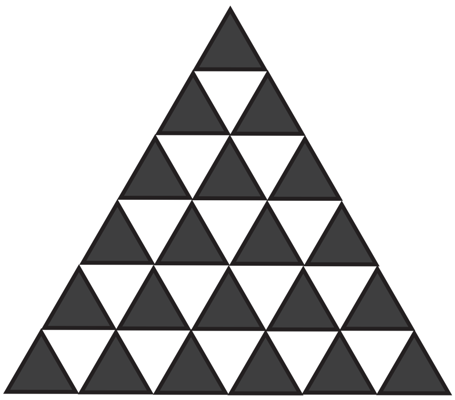
9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2022 – 2023 учебном году 11 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. *Лесной массив имеет форму правильного треугольника со стороной 6 км. Он разделён просеками, параллельными границам массива, на 36 одинаковых треугольных участков со стороной 1 км (шириной просек пренебрегаем). Лесник утверждает, что в массиве растёт ровно 2022 берёзы, при этом для любых двух участков, разделённых километровым участком просеки, количество берёз в одном из них ровно на одну больше количества берёз в другом. Докажите, что лесник ошибается. Известно, что на просеках берёзы не растут.*



К решению задачи 11.1

Решение: Раскрасим участки в 2 цвета в «шахматном порядке» (см. рисунок). Предположим противное, пусть лесник прав. Тогда из условия о разности количества берёз на соседних участках следует, что чётность количества берёз на чёрных участках одинакова и отличается от чётности числа берёз на белых участках. Значит, участки с нечётным количеством берёз — это либо все белые (их 15), либо все чёрные (их 21). Значит, суммарное количество берёз нечётно (из 36 слагаемых нечётное количество нечётных). Но, по словам лесника, оно равно 2022. Противоречие.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Имеется «шахматная» раскраска массива ИЛИ идея о нечётности общего количества берёз	2 балла
Утверждение доказано при дополнительных предположениях (например, в предположении, что на всех «чёрных» участках берёз поровну)	0 баллов

11.2. *Серёжа разрезал выпуклый 67-угольник по прямой на два многоугольника, затем таким же образом по другой прямой разрезал один из получившихся многоугольников, затем — один из трех получившихся и так далее. В итоге у него получилось восемь n-угольников. Найдите все возможные значения n.*

Решение: Так как получилось 8 многоугольников, всего было сделано 7 разрезов. Разрезы могут быть трёх типов: 1) по диагонали разрезаемого многоугольника;

2) по прямой, проходящей ровно через одну вершину разрезаемого многоугольника; 3) по прямой, не проходящей через вершины разрезаемого многоугольника. Посмотрим, как изменится сумма углов всех многоугольников при каждом из разрезов. При разрезе первого типа она не меняется; при разрезе второго типа увеличивается на 180°; при разрезе третьего типа — на 360°.

Пусть всего было сделано a разрезов первого типа, b — второго типа, и c — третьего (a, b, c — неотрицательные целые числа, в сумме дающие 7.). Так как сумма углов n-угольника равна $180°(n-2)$, имеем уравнение

$$180°(67-2) + 180° \cdot b + 360° \cdot c = 8 \cdot 180°(n-2);$$
$$65 + b + 2c = 8(n-2).$$

Число $65 + b + 2c$, следовательно, нацело делится на 8, то есть число $b + 2c$ при делении на 8 обязано давать в остатке 7. Так как

$$0 \leqslant b + 2c \leqslant (b+c) + c \leqslant (a+b+c) + (a+b+c) = 14,$$

отсюда следует, что $b + 2c = 7$. Тогда $n - 2 = 9$ и $n = 11$. Примеры, что описанная в задаче ситуация возможна, строятся несложно. Например, положим $b = 7$. Тогда $a = c = 0$. Все 7 разрезов можно провести через одну фиксированную вершину многоугольника, последовательно отрезая от него одиннадцатиугольники разрезами, через другие вершины не проходящими.

Ответ: $n = 11$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Доказано, что n может равняться только 11, но нет примера разрезания на 11-и угольники ИЛИ при верном ходе решения имеются арифметические ошибки (возможно, приведшие к неверному ответу)	6 баллов
Условие задачи верно выражено через уравнение (или систему уравнений); это уравнение (система) не решено или решено неверно	4 балла
Имеется попытка посчитать сумму углов полученных многоугольников ИЛИ найти общее количество сторон после всех разрезаний	3 балла
Приведён пример разрезания на восемь одиннадцатиугольников	1 балл
Ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

11.3. *Найдите наименьшее значение положительной константы C, чтобы неравенство*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{(x+C)(y+C)}$$

выполнялось для всех неотрицательных чисел x и y. Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Положим $x = y = 1$. Тогда неравенство принимает вид $2 \leqslant (C+1)$, откуда $C \geqslant 1$.

Покажем, что при $C \geqslant 1$, x, $y \geqslant 0$ неравенство всегда выполнено. Действительно, в этом случае

$$(x+C)(y+C) \geqslant (x+1)(y+1) = xy + (x+y) + 1 = \\ = (x+y) + 2\cdot\frac{(xy)+1}{2} \geqslant (x+y) + 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

В силу неотрицательности всех выражений, входящих в последнее неравенство, оно равносильно доказываемому.

Способ 2. Произведём равносильные (при x, y, $C \geqslant 0$) преобразования:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \leqslant \left(\sqrt{(x+C)(y+C)}\right)^2,$$

$$x+y+2\sqrt{xy} \leqslant xy + Cx + Cy + C^2,$$

$$(\sqrt{xy}-1)^2 + (C-1)(x+y) + (C-1)(C+1) \geqslant 0.$$

Теперь ясно, что при $C \geqslant 1$ неравенство выполнено, так как все слагаемые в левой части в этом случае неотрицательны. Если же $C < 1$, то неравенство не будет иметь место, например, для любых чисел x и y, произведение которых равно 1.

Ответ: $C = 1$.

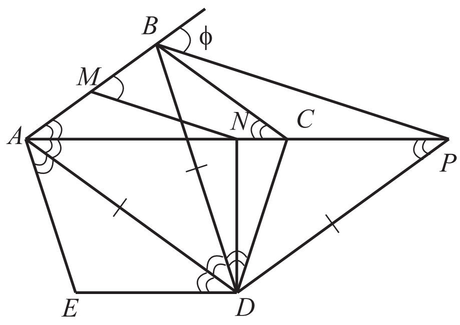
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Показано, что $C \geq 1$ (то есть что при $C < 1$ неравенство верно не для всех пар $(x;\, y)$), но не обосновано, что при $C = 1$ неравенство верно для любых x, $y \geqslant 0$	4 балла
Доказано, что при $C = 1$ условие задачи выполнено для любых x, $y \geqslant 0$	2 балла
Верный ответ (даже при отсутствии обоснования)	1 балл
Любые выкладки, из которых не видна идея решения, и/или проверка любых конкретных значений $C \neq 1$	0 баллов

11.4. *Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Из точки D проведен перпендикуляр к AC. Пусть точка N — основание этого перпендикуляра и точка M — середина AB. Найдите угол NMB.*

Решение:

<u>Способ 1.</u> На продолжении прямой AC за точку C отметим точку P так, что $NA = NP$ (см. рисунок). Треугольник ADP — равнобедренный (у него высота совпадает с медианой) и $PD = DA = DB$. Кроме того, MN — средняя линяя треугольника ABP, поэтому $MN \parallel BP$. Угол NMB равен внешнему углу треугольника ABP при вершине B (эти углы соответственные). Именно этот внешний угол — обозначим его φ — нам и требуется найти. Произведём подсчёт углов. Сумма углов любого пятиугольника равна $180° \cdot 3 = 540°$. В правильном многоугольнике все углы равны, значит каждый угол правильного пятиугольника равен $108°$. Так как около правильного пятиугольника можно описать окружность, диагонали четырёхугольника, выходящие из вершины одного угла, делят этот угол на три равные части. Значит, угол между такими диагоналями, равно угол между диагональю и стороной равен $108° : 3 = 36°$ — на рисунке эти углы отмечены двумя дугами. Треугольник ADP равнобедренный, поэтому $\angle APD = \angle DAP = \angle BAP$. Тогда прямые AB и DP параллельны, так как секущая AP образует с ними равные внутренние накрест лежащие углы. Рассмотрим трапецию $ABPD$; в ней сумма углов, прилежащих к стороне AD равна $180°$, поэтому $\angle ADP = 108°$. Тогда $\angle BDP = \angle ADP - \angle ADB = 72°$. Треугольник BDP тоже равнобедренный, и углы при его основании равны

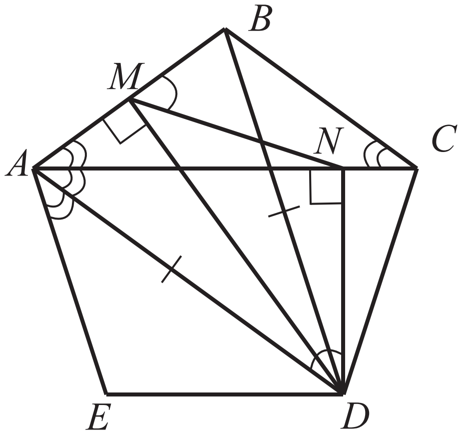


К решению задачи 11.4

$$\frac{180° - \angle BDP}{2} = 54°.$$

Итак, $\angle DPB = 54°$, и этому же значению равен угол φ, так как он является внутренним накрест лежащим при параллельных AB и PD и секущей BP.

<u>Способ 2.</u> Так как диагонали правильного пятиугольника равны, треугольник ABD — равнобедренный, поэтому его медиана DM будет также и высотой. Рассмотрим окружность с диаметром AD. Так как углы AND и AMD — прямые, точки M и N лежат на этой окружности. Иными словами, четырёхугольник $AMND$ — вписанный. Значит, $\angle AMN + \angle ADN = 180° = \angle AMN + \angle BMN$, откуда $\angle ADN = \angle BMN$. Из прямоугольного треугольника ADN следует, что $\angle ADN = 90° - \angle DAN$. Как уже отмечалось в способе 1, диагонали правильного



К решению задачи 11.4

пятиугольника делят его углы на три равные части, поэтому

$$\angle DAN = \frac{1}{3}\angle EAB = \frac{1}{3}\cdot\frac{540^\circ}{5} = 36^\circ.$$

Отсюда $\angle NMB = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

Ответ: 54°.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Решение в целом верно, но имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Доказано, что четырёхугольник $AMND$ вписанный	4 балла
Доказано, что диагонали правильного пятиугольника являются трисектрисами его углов	3 балла
Отмечен, но не доказан факт, что диагонали правильного пятиугольника являются трисектрисами его углов	2 балла
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	1 балл
Доказаны посторонние утверждения или замечены некоторые свойства конструкции, но не видно, как с их помощью можно решить задачу	0 баллов

11.5. *Последовательность a_1, a_2, a_3, …, a_n, … такова, что*

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = a_n + n^2 \text{ при всех } n \geq 1.$$

Найдите a_{300}. Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Будем искать a_n в виде многочлена третьей степени от числа n, то есть пусть $a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ для некоторых постоянных чисел A, B, C, D. Рекуррентное уравнение из условие тогда приобретает вид

$$A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D = An^3 + Bn^2 + Cn + D + n^2,$$
$$An^3 + 3An^2 + 3An + A + Bn^2 + 2Bn + B + Cn + C + D -$$
$$- An^3 - Bn^2 - Cn - D - n^2 = 0,$$
$$(3A-1)n^2 + (3A+2B)n + (A+B+C) = 0.$$

Так как равенство справедливо для всех натуральных n все три коэффициента $3A-1$, $3A+2B$ и $A+B+C$ должны равняться нулю, поэтому $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$ и $C = \dfrac{1}{6}$. Значит,

$$a_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + D.$$

С учётом того, что $a_1 = 1$, получаем, что $D = 1$. Тогда

$$a_{300} = \frac{1}{3} \cdot 300^3 - \frac{1}{2} \cdot 300^2 + \frac{1}{6} \cdot 300 + 1 = 9\,000\,000 - 45\,000 + 50 + 1 = 8\,955\,051.$$

<u>Способ 2.</u> Сложим левые и правые части трёхсот уравнений: $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 1^2$, $a_3 = a_2 + 2^2$, …, $a_{300} = a_{299} + 299^2$. Получим

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{299}) + a_{300} = 1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{299}) + (1^2 + 2^2 + \ldots + 299^2).$$

Отсюда

$$a_{300} = 1 + (1^2 + 2^2 + \ldots + 299^2).$$

Формула суммы квадратов первых n натуральных чисел известна:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Применяя её, получаем

$$a_{300} = 1 + \frac{299 \cdot 300 \cdot 599}{6} = 8\,955\,051.$$

Ответ: 8 955 051.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
В решении использована, но не доказана формула суммы квадратов первых n натуральных чисел	баллы не снижаются
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	6 баллов
Верное решение опирается на необоснованные равенства типа $a_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + 1$ или $a_{300} = 1 + (1^2 + 2^2 + \ldots + 299^2)$	5 баллов
Доказано верное равенство, выражающее a_n через сумму n слагаемых; (например, доказано, что $a_{300} = 1 + (1^2 + 2^2 + \ldots + 299^2)$)	2 балла
Имеется попытка получить для a_n формулу в виде многочлена третьей (или более высокой) степени, но формула не получена	1 балл
Найдено несколько первых (меньше чем 2022) членов последовательности	0 баллов

11.6. *По кругу написаны m чисел таким образом, что каждые два соседних числа отличаются на 1. Назовем число сильным, если оба его соседа меньше него, и слабым, если оба его соседа больше него. Обозначим сумму сильных чисел через S, а сумму слабых чисел — через s. Докажите, что $m = 2(S - s)$.*

Решение:

Способ 1. Между любыми двумя сильными числами есть слабое — наименьшее из чисел, стоящих между ними. Аналогично между двумя слабыми числами всегда есть сильное. Значит, сильные и слабые числа чередуются и их поровну. Запишем их в порядке следования по кругу: a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, …, a_k, b_k, a_1. (Здесь a_i — сильные числа, а b_i — слабые). Тогда, с одной стороны,

$$S - s = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_k - b_k),$$

с другой —

$$S - s = (a_2 - b_1) + (a_3 - b_2) + \ldots + (a_1 - b_k).$$

Тогда

$$2(S - s) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_1) + (a_2 - b_2) + \\ + (a_3 - b_2) + \ldots + (a_k - b_k) + (a_1 - b_k).$$

Но каждая разность $a_i - b_i$ — это количество чисел в полуинтервале $[a_i; b_i)$, а разность $a_i - b_{i-1}$ — количество чисел в полуинтервале $[b_{i-1}; a_i)$. Таким образом, в правой части последней суммы стоит общее количество чисел, то есть число m, ч. т. д.

Способ 2. Рассмотрим две операции. Операция 1: все числа увеличиваем на одно и то же число. Операция 2: к некоторому слабому числу прибавляем 2. Покажем, что при этих операциях величина $S - s$ не изменяется, то есть является инвариантом этих процессов. В самом деле, между любыми двумя сильными числами есть слабое — наименьшее из чисел, стоящих между ними. Аналогично между двумя слабыми числами всегда есть сильное. Значит, сильные и слабые числа чередуются и их поровну. Если ко всем записанным числам добавить и вычесть одно и то же число (пусть число a), то каждая из сумм S и s увеличится на одну и ту же величину (na, где n — общее количество сильных чисел), а, значит, разность $(S - s)$ не изменится при операции 1. Рассмотрим операцию 2. Пусть мы увеличили слабое число b до числа $b + 2$. Оно стало сильным, так как оба его соседа по-прежнему равны $b + 1$. Сумма S увеличилась на $b + 2$, а s уменьшилась на b, значит, их разность $S - s$ увеличилась на $2b + 2$. Но на обе суммы влияют ещё и изменения статуса соседей изменённого числа. Предположим, что сосед до увеличения был сильным (то есть с другой стороны от него стояло число b). Теперь он сильным быть перестал, а слабым не стал, поэтому за его счёт разность $S - s$ уменьшилась на $b+1$. Второй вариант — сосед не был сильным (с другой стороны стояло число $b + 2$). Тогда он стал слабым, и за счёт этого число s увеличилось на $b+1$, а вся разность $S-s$ на столько же уменьшилась. Так как соседа два, то во всех случаях разность $S-s$ при операции 2 не меняется.

Теперь возьмём исходную расстановку и будем последовательно применять эти операции. Сначала отнимем из всех чисел наименьшее из них, получим набор чисел, наименьшее из которых 0. Затем ко всем нулям добавим по 2. Вычтем из всех чисел по 1. Снова ко всем нулям добавим по 2, снова отнимем по 1 и так до бесконечности. Каждое число, большее 1, при паре таких операций уменьшится на 1. Значит, после достаточно большого количества проделанных операций все числа будут равны либо 0, либо 1. То есть получим последовательность 0, 1, 0, 1, …, 0, 1, 0. В ней поровну нулей и единиц — по $m/2$ чисел. Значит, для неё $S = m/2$, $s = 0$ и $2(S-s) = m$. В силу вышедоказанного, это же верно и для начального набора чисел.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верное доказательство опирается на не доказанный факт чередования сильных и слабых чисел	6 баллов
Доказано, что величина $S-s$ равна количеству чисел на как на участках убывания, так и на участках возрастания ИЛИ верно обосновано, что величина $S-s$ не меняется при каждой из двух операций, указанных во втором способе решения	5 баллов
Доказано, что величина $S-s$ равна количеству чисел или только на участках убывания, или только на участках возрастания ИЛИ верно обосновано, что величина $S-s$ не меняется при одной из двух операций, указанных во втором способе решения	3 балла
Доказано, что сильные и слабые числа на окружности чередуются или что слабых и сильных чисел поровну	2 балла
Факт чередования сильных и слабых чисел замечен, но не доказан	1 балл
Утверждение задачи проверено в частных случаях (например, если сильное число единственно)	0 баллов