МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2022–2023 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 10 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.
2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.
3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.
4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.
5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.
6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

10.1. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $p^2 + (q-1)^2$ — составное.

10.2. Из точки A, лежащей за пределами окружности ω, проведены две касательные к этой окружности; B и C — точки касания. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на окружности ω.

10.3. Для каждого натурального числа $n > 2$ (n — параметр) решите уравнение

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = n(n-1).$$

10.4. Вдоль правой стороны аллеи посажены в ряд яблони и груши. Аня, Боря, Вера и Гена прошли всю аллею (в одном и том же направлении). Аня сосчитала сколько раз за яблоней следует груша — у неё получилось 16 раз. Боря сосчитал, сколько раз за грушей следует яблоня, и получил число 15. Вера сосчитала все тройки подряд стоящих деревьев, в которых груша расположена между двумя яблонями, таких троек оказалось 8. А Гена сосчитал число яблонь, перед которыми растут хотя бы две груши, но не сказал, сколько у него получилось. Впрочем, ребята и без слов Гены смогли определить количество таких яблонь. Сделайте это и Вы.

10.5. Тридцать пять шариков массой 1 г, 2 г, …, 35 г разложили по двум коробкам, в каждой коробке находится хотя бы один шарик. Затем один шарик из второй коробки переложили в первую. После этого среднее арифметическое масс всех шариков в первой коробке увеличилось на 4 г. Какое наибольшее число шариков могло быть первоначально в первой коробке? Ответ обоснуйте.

10.6. Дана выпуклый многоугольник Φ на плоскости и точка M внутри него. Из прямых, проходящих через M, выбрали такую, что разность площадей фигур, на которые эта прямая делит многоугольник Φ, максимальна — прямую l. Докажите, что M — середина отрезка XY, где X и Y — точки пересечения l с периметром фигуры.