Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2022 – 2023 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2022 – 2023 учебном году
10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. *Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $p^2 + (q-1)^2$ — составное.*

Решение: Пусть a и b — корни данного уравнения. По теореме Виета $p = -a - b$, $q = ab$. Поэтому

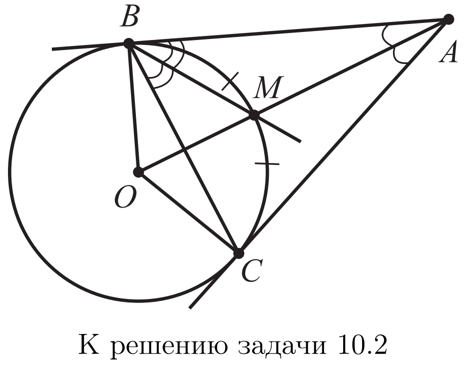
$$p^2 + (q-1)^2 = (a+b)^2 + (ab-1)^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2 + a^2b^2 - 2ab + 1 = \\ = (a^2 + a^2b^2) + (b^2 + 1) = (a^2+1)(b^2+1).$$

Остаётся заметить, что каждое из чисел $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ натуральное и (так как a и b отличны от нуля) не равно 1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Число $p^2 + (q-1)^2$ верно выражено через корни уравнения	4 балла
Утверждение доказано для некоторых бесконечных классов уравнений (например, для всех уравнений, оба корня которых чётны)	1 балл
Утверждение проиллюстрировано на конкретных примерах	0 баллов

10.2. *Из точки A, лежащей за пределами окружности ω, проведены две касательные к этой окружности; B и C — точки касания. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на окружности ω.*



К решению задачи 10.2

Решение: Пусть O — центр окружности ω. Тогда треугольники OAB и OAC равны, как прямоугольные с равными катетами. Следовательно, луч AO — биссектриса угла A. Пусть этот луч пересекает дугу AB в точке M — см. рисунок.

В силу симметрии относительно прямой AO, дуги BM и CM равны. Угол CBM — вписанный в ω, поэтому равен половине дуги CM. Угол ABM — это угол между хордой и касательной; он равен половине дуги BM. Итак, $\angle ABM = \angle CBM$. Но в этом случае точка M лежит на биссектрисах углов B и A треугольника ABC, то есть является центром вписанной в него окружности.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Имеется ссылка на теорему об угле между касательной и хордой	2 балла
Указано (но не доказано), что центр вписанной окружности лежит на середине дуги BC	1 балл
Доказаны посторонние утверждения или замечены некоторые свойства конструкции, но не видно, как с их помощью можно решить задачу	0 баллов

10.3. *Для каждого натурального числа $n > 2$ (n — параметр) решите уравнение*

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = n(n-1).$$

Решение:

Способ 1. Преобразуем уравнение равносильным способом:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = n(n-1),$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x^2-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = n(n-1) + \frac{2x^2}{x^2-1},$$

$$\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 = n(n-1) + \frac{2x^2}{x^2-1},$$

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 = n(n-1) + \frac{2x^2}{x^2-1}.$$

Пусть $t = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$. Тогда

$$t^2 = n(n-1) + t,$$
$$t^2 - t - n^2 + n = 0,$$
$$(t-n)(t+n) - (t-n) = 0,$$
$$(t-n)(t+n-1) = 0,$$
$$t = n \quad \text{или} \quad t = 1-n.$$

Обратная замена:

$$1)\ t=n \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2-1}=n \Leftrightarrow x^2(n-2)=n.$$

Так как по условию $n>2$, имеем два корня: $x=\pm\sqrt{\dfrac{n}{n-2}}$.

$$2)\ t=1-n \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2-1}=1-n \Leftrightarrow x^2(1+n)=n-1 \Leftrightarrow x^2=\pm\frac{n-1}{n+1}.$$

При $n>2$ уравнение имеет два корня $x=\pm\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$. Окончательно получаем четыре корня: $x=\pm\sqrt{\dfrac{n}{n-2}}$, $x=\pm\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$.

<u>Способ 2.</u> Пусть $a=n(n-1)$. Тогда

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=a;$$

$$\frac{x^2(x-1)^2}{(x+1)^2}+\frac{x^2(x+1)^2}{(x-1)^2}=a;$$

$$x^2((x-1)^2+(x+1)^2)=a(x^2-1)^2;$$

$$2x^2(x^2+1)=a(x^2-1)^2.$$

При $n>2$ коэффициент при x^4 положителен, и мы имеем биквадратное уравнение

$$(a-2)x^4-2(a+1)x^2+a=0.$$

Его дискриминант, делённый на четыре, равен $(a+1)^2-a(a-2)=4a+1$. Возвращаясь к n, получаем что он равен $(2n-1)^2>0$. Таким образом, биквадратное уравнение имеет два корня

$$x^2=\frac{n(n-1)+1+2n-1}{n(n-1)-2}=\frac{n-1}{n+1}$$

и

$$x^2=\frac{n(n-1)+1-2n+1}{n(n-1)-2}=\frac{n}{n-2}.$$

Оба значения x^2 положительны, поэтому всего имеем четыре корня:

$$x=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}},\quad x=\pm\sqrt{\frac{n}{n-2}}.$$

<u>Способ 3.</u> Решим уравнение как квадратное относительно n, считая x параметром. Конечно, $x\neq\pm1$.

$$n^2-n-\left(\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{x^2}{(x-1)^2}\right)=0.$$

Его дискриминант равен

$$1+4\left(\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{x^2}{(x-1)^2}\right)=\frac{(x+1)^2(x-1)^2+4x^2((x+1)^2+(x-1)^2)}{(x+1)^2(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^4-2x^2+1+4x^2(2x^2+2)}{(x^2-1)^2}=\frac{9x^4+6x^2+1}{(x^2-1)^2}=\left(\frac{3x^2+1}{x^2-1}\right)^2.$$

Тогда

$$n=\frac{1\pm\dfrac{3x^2+1}{x^2-1}}{2},$$

откуда

$$n=\frac{2x^2}{x^2-1}\quad\text{или}\quad n=\frac{-x^2-1}{x^2-1}.$$

В первом случае имеем

$$n(x^2-1)=2x^2\Leftrightarrow x^2(n-2)=n\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{n}{n-2}}.$$

Во втором случае получаем

$$n(x^2-1)=-x^2-1\Leftrightarrow x^2(n+1)=n-1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

В обоих случаях преобразования равносильны, так как $n>2$. Объединяя решения, получим ответ.

Ответ: $x=\pm\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ или $x=\pm\sqrt{\dfrac{n}{n-2}}$.

Примечание: Полученные корни, очевидно, принадлежат ОДЗ уравнения. Не следует снижать баллы за отсутствие этого комментария.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное решение	7 баллов
Уравнение верно сведено к квадратному или биквадратному; дальнейший анализ не приведён или неверен	4 балла
Уравнение верно решено для конкретных значений $n>2$	1 балл
Любые выкладки и преобразования, не приведшие к решению	0 баллов

10.4. *Вдоль правой стороны аллеи посажены в ряд яблони и груши. Аня, Боря, Вера и Гена прошли всю аллею (в одном и том же направлении). Аня сосчитала* *сколько раз за яблоней следует груша — у неё получилось* 16 *раз. Боря сосчитал, сколько раз за грушей следует яблоня, и получил число* 15. *Вера сосчитала все тройки подряд стоящих деревьев, в которых груша расположена между двумя яблонями, таких троек оказалось* 8. *А Гена сосчитал число яблонь, перед которыми растут хотя бы две груши, но не сказал, сколько у него получилось. Впрочем, ребята и без слов Гены смогли определить количество таких яблонь. Сделайте это и Вы.*

Решение: Обозначим яблони и груши буквами «я» и «г», и запишем их в той последовательности, в которой они встретились ребятам. Мы получим «слово», все буквы которого «я» и «г». Условие задачи означает, что в этом слове ровно 16 сочетаний «яг», ровно 15 — «гя» и ровно 8 — «ягя». А Гена считал сочетания «ггя». Заметим, что сочетание «гя» возможно ровно в трёх случаях: 1) непосредственно перед ним стоит буква «я», 2) непосредственно перед ним стоит буква «г», 3) перед ним нет вообще никакой буквы (то есть данные груша и яблоня — первое и второе дерево аллеи). Ещё отметим, что между любыми двумя сочетаниями «гя» встретится сочетание «яг» и наоборот, поэтому такие сочетания всегда чередуются. Так как сочетаний «яг» больше, то первой (и последней тоже) буквой последовательности стоит буква «я». Тогда случай 3 невозможен, и количество сочетаний «гя» в точности равно сумме числа сочетаний «ггя» и «ягя». Из уравнения $15 = x + 8$ находим ответ.

Ответ: 7 яблонь.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верное и обоснованное решение	7 баллов
Не учтён случай (и не доказана его невозможность), когда первое дерево аллеи — груша, а в остальном решение верно	5 баллов
Доказано, что первым деревом в аллее является яблоня (а последним — груша)	3 балла
Верный ответ проиллюстрирован верным примером аллеи, но единственность ответа не доказана	1 балл
Ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

10.5. *Тридцать пять шариков массой* 1 *г,* 2 *г, …,* 35 *г разложили по двум коробкам, в каждой коробке находится хотя бы один шарик. Затем один шарик из второй коробки переложили в первую. После этого среднее арифметическое масс всех шариков в первой коробке увеличилось на* 4 *г. Какое наибольшее число шариков могло быть первоначально в первой коробке? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть в первой коробке было n шариков со средней массой A г. Переложенный шарик должен весить больше A г, причём на столько, чтобы эти «добавочные граммы» распределились по 4 на каждый из $(n+1)$ шариков в первой коробке, то есть масса переложенного шарика равна $A + 4(n+1)$. Отсюда следует, в частности, что A — число целое. Кроме того,

$$A \geqslant \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{n+1}{2},$$

а масса переложенного шарика не больше 35 г. Поэтому

$$\frac{n+1}{2} + 4(n+1) \leqslant 35,$$

откуда $n \leqslant \frac{61}{9}$. Так как n — число натуральное, $n \leqslant 6$. При $n = 6$ строится пример: пусть в первой коробке 6 шариков общим весом 24 г (например, подойдёт набор 1, 2, 3, 4, 5, 9) и мы переложили в него шарик массой 32. Средний вес шариков в коробке вырос с $24 : 6 = 4$ до $(24 + 32) : 7 = 8$ — в точности на 4 грамма.

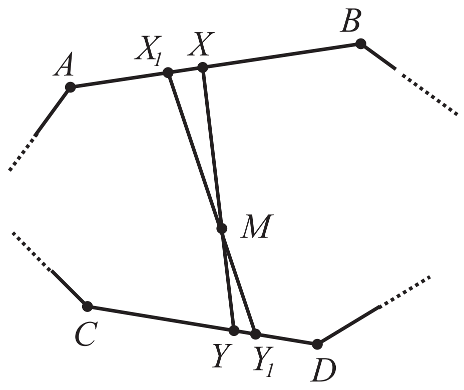
Ответ: 6 шариков.

Рекомендации по проверке:

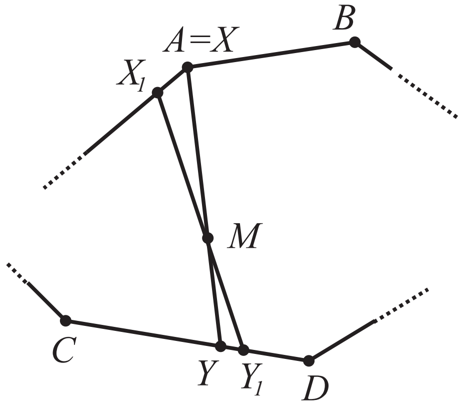
есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения есть ошибка в арифметике	6 баллов
Доказано, что изначально семи и больше шариков в первой коробке быть не может; обоснование, что их может быть 6 отсутствует или неверно	4 балла
Верный пример с 6 шариками в первой коробке; доказательство его оптимальности неверно или отсутствует	2 балла
Условие задачи верно записано с помощью уравнения, дальнейших продвижений нет	1 балл
Примеры, когда в первой коробке меньше шести шариков	0 баллов

10.6. *Дана выпуклый многоугольник Φ на плоскости и точка M внутри него. Из прямых, проходящих через M, выбрали такую, что разность площадей фигур, на которые эта прямая делит многоугольник Φ, максимальна — прямую l. Докажите, что M — середина отрезка XY, где X и Y — точки пересечения l с периметром фигуры.*

Решение: Предположим противное, и пусть, например $XM > MY$. Сначала разберём случай, когда ни одна из точек X, Y не является вершиной Φ (рисунок слева). Обозначим сторону многоугольника, содержащую точку X, как AB, а сторону, содержащую точку Y, как CD (точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой l). Без ограничения общности, считаем, что из двух многоугольников, на которые прямая l делит многоугольник Φ, меньшую площадь имеет тот, который содержит точку A. На отрезке AX отметим точку X_1 так, что прямая $l_1 = A_1M$ пересекает отрезок YD в некоторой точке Y_1. Так как $XM > MY$,



к решению задачи 10.6, случай 1



к решению задачи 10.6, случай 2

точку X_1 можно выбрать (из соображений непрерывности) так, что $X_1M > Y_1M$. Тогда

$$S_{XMX_1} = \frac{1}{2} \cdot XM \cdot X_1M \cdot \sin XMX_1 > \frac{1}{2} \cdot YM \cdot Y_1M \cdot \sin YMY_1 = S_{YMY_1},$$

поэтому площадь многоугольника $\ldots AX_1Y_1C \ldots$ меньше площади многоугольника $\ldots AXYC \ldots$ (а площадь многоугольника $\ldots BX_1Y_1D \ldots$ больше площади многоугольника $\ldots BXYD \ldots$), поэтому разность площадей, на которые прямая l_1 делит многоугольник Φ больше, чем аналогичная разность для прямой l. Противоречие с определением прямой l.

Ситуация, когда одна из точек X, Y или обе эти точки будут вершинами многоугольника Φ (на рисунке справа изображён случай, когда точка X совпала с вершиной, а точка Y — нет; остальные два случая аналогичны), принципиально не отличается: на периметре многоугольника также можно выбрать точки X_1 и Y_1 близкие к точкам X и Y соответственно и такие, что прямая X_1Y_1 проходит через точку M. Эта прямая разделит многоугольник Φ на фигуры, разность площадей которых больше, чем разность площадей, на которые делит многоугольник прямая l.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Утверждение доказано для двух из трёх случаев прохождения прямой (через две вершины, через одну вершину и не через вершины)	6 баллов
Утверждение доказано для одного из трёх случаев прохождения прямой (через две вершины, через одну вершину и не через вершины)	5 баллов
Утверждение доказано только для некоторых типов многоугольников	0 баллов