

### Задача 1. Опять средняя скорость

Автомобиль сначала разгоняется со старта с некоторым постоянным ускорением  $a$ , а затем тормозит с таким же по модулю ускорением до полной остановки. В автомобиле есть устройство, измеряющее его среднюю скорость от начала движения до данного момента времени. Оказалось, что такая средняя скорость совпадала с мгновенной скоростью автомобиля в момент времени  $t_1 = 4$  с от начала движения. До остановки автомобиль прошёл путь  $s = 40$  м. Найдите момент времени начала торможения  $t_0$  и ускорение автомобиля  $a$ .

#### Решение

*1 способ решения.*

Заметим, что момент времени  $t_1$  равенства средней и мгновенной скорости может находиться только на участке торможения. Действительно, на участке разгона к моменту  $t$  автомобиль приобретёт мгновенную скорость  $v(t) = at$ , пройдя при этом путь  $S(t) = \frac{at^2}{2}$ . Средняя же скорость к этому моменту времени  $v_{\text{cp}} = \frac{S(t)}{t} = \frac{at}{2} < at$ .

Рассмотрим момент времени  $t_1 > t_0$ . Мгновенная скорость к этому времени

$$v(t_1) = v_{\text{max}} - a(t_1 - t_0) = at_0 - a(t_1 - t_0) = a(2t_0 - t_1),$$

где  $v_{\text{max}} = at_0$  — максимальная скорость, достигнутая на этапе разгона.

Путь, пройденный на всём этапе разгона автомобиля, составляет  $\frac{at_0^2}{2}$ . Тогда путь  $S_1$ , пройденный к моменту времени  $t_1$

$$S_1 = \frac{at_0^2}{2} + at_0(t_1 - t_0) - \frac{a(t_1 - t_0)^2}{2} = a \left( 2t_0t_1 - t_0^2 - \frac{t_1^2}{2} \right).$$

Средняя скорость движения от старта до момента времени  $t_1$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
 Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс

$$v_{\text{cp}} = \frac{S_1}{t_1} = a \frac{2t_0 t_1 - t_0^2 - \frac{t_1^2}{2}}{t_1}.$$

Пользуемся условием  $v_{\text{cp}} = v(t_1)$ :

$$\frac{2t_0 t_1 - t_0^2 - \frac{t_1^2}{2}}{t_1} = 2t_0 - t_1.$$

$$2t_0 t_1 - t_0^2 - \frac{t_1^2}{2} = (2t_0 - t_1)t_1 = 2t_0 t_1 - t_1^2, \Rightarrow t_0^2 = \frac{t_1^2}{2},$$

откуда получаем

$$t_0 = \frac{t_1}{\sqrt{2}} \approx 2,8 \text{ с.}$$

Теперь найдём ускорение автомобиля  $a$ . Полный пройденный путь до момента остановки в два раза больше пути, пройденного на этапе разгона

$$S = 2 \cdot \frac{at_0^2}{2} = at_0^2,$$

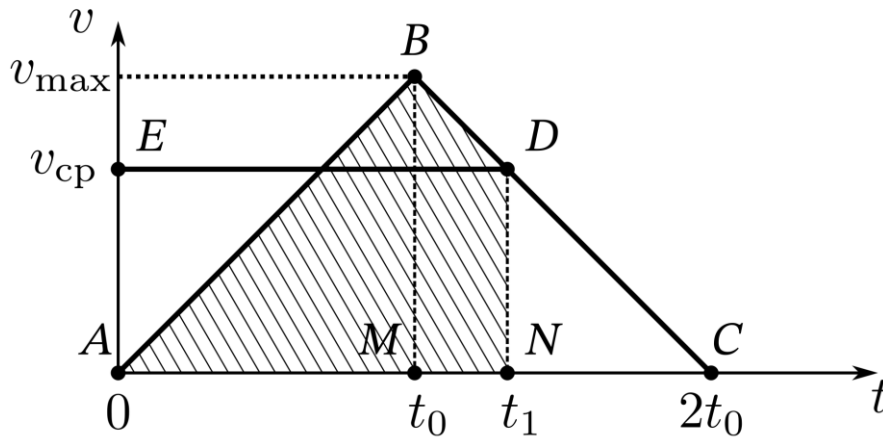
откуда

$$a = \frac{S}{t_0^2} = \frac{2S}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 40}{4^2} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

*2 способ решения.*

Задачу можно решить графически. Изобразим график зависимости мгновенной скорости автомобиля от времени. Поскольку ускорение на участке разгона равно по модулю ускорению на участке торможения, график будет симметричным относительно момента  $t_0$ , полное время движения составляет  $2t_0$ . Изобразим на графике момент времени  $t_1$ , учитывая, что он приходится на участок торможения (см. способ решения 1).

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
 Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс



Путь  $S_1$ , пройденный к моменту  $t_1$ , будет являться площадью фигуры  $ABDN$ :

$$S_1 = \frac{1}{2} v_{\max} t_0 + \frac{1}{2} (v_{\max} + v_{\text{cp}}) (t_1 - t_0).$$

С другой стороны, средняя скорость к моменту  $t_1$  по определению составляет  $v_{\text{cp}} = \frac{S_1}{t_1}$ , откуда  $S_1 = v_{\text{cp}} t_1$  (пройденный путь  $S_1$  также равен площади прямоугольника  $AEDN$ ). Приравняв друг к другу различные выражения для  $S_1$ , получаем

$$v_{\text{cp}} t_1 = \frac{1}{2} v_{\max} t_0 + \frac{1}{2} (v_{\max} + v_{\text{cp}}) (t_1 - t_0) = \frac{1}{2} v_{\max} t_1 + \frac{1}{2} v_{\text{cp}} (t_1 - t_0).$$

После преобразований получаем

$$\frac{1}{2} v_{\text{cp}} (t_1 + t_0) = \frac{1}{2} v_{\max} t_1.$$

Соотношение между средней  $v_{\text{cp}}$  и максимальной  $v_{\max}$  скоростями:

$$\frac{v_{\text{cp}}}{v_{\max}} = \frac{t_1}{t_1 + t_0}.$$

С другой стороны, из подобия прямоугольных треугольников  $CND$  и  $CMB$ , получаем следующее соотношение:

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
 Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс

$$\frac{v_{\text{cp}}}{v_{\text{max}}} = \frac{CN}{CM} = \frac{2t_0 - t_1}{2t_0 - t_0} = \frac{2t_0 - t_1}{t_0}.$$

Приравниваем:

$$\frac{t_1}{t_1 + t_0} = \frac{2t_0 - t_1}{t_0} \Rightarrow (2t_0 - t_1)(t_1 + t_0) = t_1 t_0 \Rightarrow 2t_0^2 = t_1^2,$$

откуда момент начала торможения

$$t_0 = \frac{t_1}{\sqrt{2}} \approx 2,8 \text{ с.}$$

Теперь найдём ускорение автомобиля  $a$ . Полный пройденный путь до момента остановки будет являться площадью треугольника  $ABC$ :

$$S = \frac{1}{2} v_{\text{max}} 2t_0 = v_{\text{max}} t_0 = at_0 \cdot t_0 = at_0^2,$$

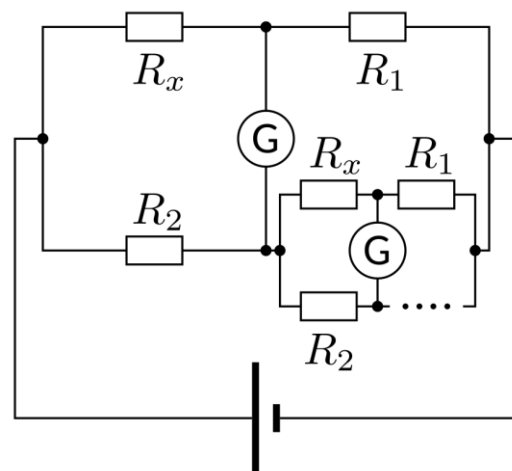
откуда

$$a = \frac{S}{t_0^2} = \frac{2S}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 40}{4^2} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Таким образом, момент времени начала торможения  $t_0 = \frac{t_1}{\sqrt{2}} \approx 2,8 \text{ с}$ ,  
 ускорение автомобиля  $a = \frac{2S}{t_1^2} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

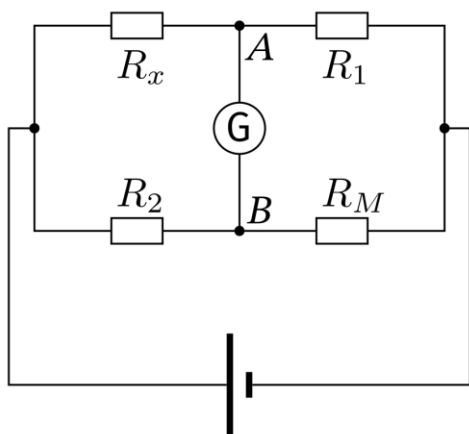
## Задача 2. Бесконечный мост

Часто для измерения сопротивления используют мост Уитстона. Собрана схема, в которой мостовая схема повторяется бесконечное число раз. Гальванометры  $G$  во всех схемах показывают, что токи в перемычках отсутствуют  $I_g = 0$ . Сопротивления элементов  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм. Найдите сопротивление  $R_x$ .



### Решение

Обозначим полное сопротивление схемы как  $R_M$ . Если мостовая схема повторяется бесконечное количество раз, то можно в схеме заменить повторяющийся участок на эквивалентный резистор  $R_M$ .



Если ток через перемычку не течёт, то это означает, что потенциалы точек  $A$  и  $B$  одинаковы, что означает, что их можно считать либо соединёнными проводником, либо не соединёнными между собой:

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
 Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс

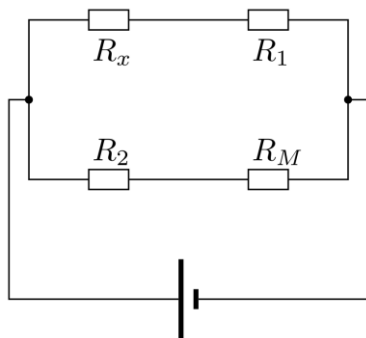


схема 1

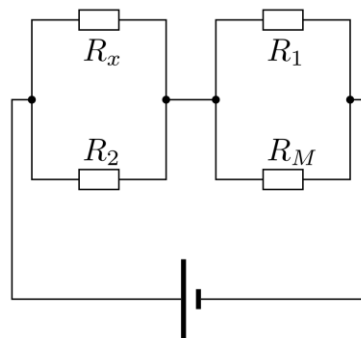


схема 2

Первая схема обозначает, что сила тока через резисторы  $R_x$  и  $R_1$  будут одинаковой (обозначим её  $I_1$ ), как и сила тока через  $R_2$  и  $R_M$  (обозначим её  $I_2$ ). Вторая схема обозначает, что падения напряжения на  $R_x$  и  $R_2$  будут равны, также как и падения напряжения на  $R_1$  и  $R_M$ :

$$I_1 R_x = R_2 I_2,$$

$$I_1 R_1 = R_M I_2.$$

Почленно деля получившиеся равенства, находим условие для уравновешенного моста:

$$\frac{R_x}{R_1} = \frac{R_2}{R_M},$$

откуда можно выразить сопротивление моста  $R_M = \frac{R_1 R_2}{R_x}$ .

С другой стороны, сопротивление моста  $R_M$  можно выразить с помощью схемы 1 или 2. Например, для схемы 1

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_x + R_1} + \frac{1}{R_2 + R_M}} = \frac{(R_1 + R_x)(R_2 + R_M)}{R_1 + R_2 + R_x + R_M}.$$

После выполнения математических преобразований получим следующее уравнение

$$R_M^2 + R_2 R_M - (R_1 R_2 + R_2 R_x) = 0.$$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
 Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс

После подстановки  $R_M = \frac{R_1 R_2}{R_x}$  получаем

$$\frac{R_1^2 R_2^2}{R_x^2} + \frac{R_1 R_2^2}{R_x} - R_2 R_x - R_1 R_2 = 0.$$

После преобразований получим кубическое уравнение

$$R_x^3 + R_1 R_x^2 - R_1 R_2 R_x - R_1^2 R_2 = 0.$$

*Первый вариант решения уравнения.*

Выделим множитель  $(R_x + R_1)$  в кубическом уравнении:

$$\begin{aligned} R_x^3 + R_1 R_x^2 - R_1 R_2 R_x - R_1^2 R_2 &= (R_x + R_1) R_x^2 - R_1 R_2 (R_x + R_1) \\ &= (R_x + R_1) (R_x^2 - R_1 R_2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим корни уравнения  $R_{x1} = -R_1$ ,  $R_{x2} = \sqrt{R_1 R_2}$ ,  $R_{x3} = -\sqrt{R_1 R_2}$ . Положительным (и имеющим физический смысл) является только корень  $R_x = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$  кОм.

*Второй вариант решения уравнения.*

Подставим значения  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм в кубическое уравнение

$$R_x^3 + R_x^2 - 4R_x - 4 = 0.$$

Методом подбора (например, воспользовавшись теоремой Виета), находим корни уравнения  $R_{x1} = -1$ ,  $R_{x2} = 2$ ,  $R_{x3} = -2$ . Положительным (и имеющим физический смысл) является только корень  $R_x = 2$  кОм.

*Возможный альтернативный вариант решения задачи*

Начнём с условия уравновешенного моста (отсутствия тока в перемычке):

$$\frac{R_x}{R_1} = \frac{R_2}{R_M}.$$

откуда можно выразить сопротивление моста  $R_M = \frac{R_1 R_2}{R_x}$ .

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
 Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс

Сопротивление моста  $R_M$  также можно выразить с помощью схемы 1 или 2. Например, для схемы 2

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_M}}$$

Подставляем значение  $R_M = \frac{R_1 R_2}{R_x}$

$$\frac{R_1 R_2}{R_x} = \frac{1}{\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_2}} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{R_x}{R_1 R_2}}$$

$$\frac{R_1 R_2}{R_x} = \frac{R_x R_2}{R_2 + R_x} + \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_x} = \frac{R_2 (R_1 + R_x)}{R_2 + R_x}$$

$$(R_2 + R_x) R_1 R_2 = R_x R_2 (R_1 + R_x)$$

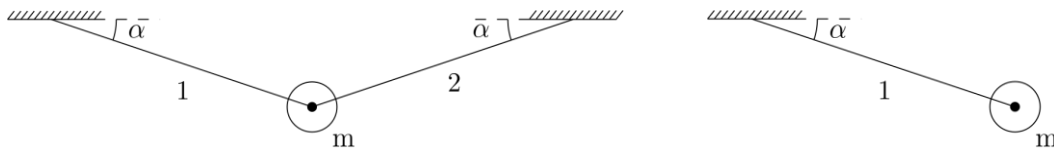
$$R_1 R_2 = R_x^2$$

Таким образом, получаем  $R_x = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$  кОм.

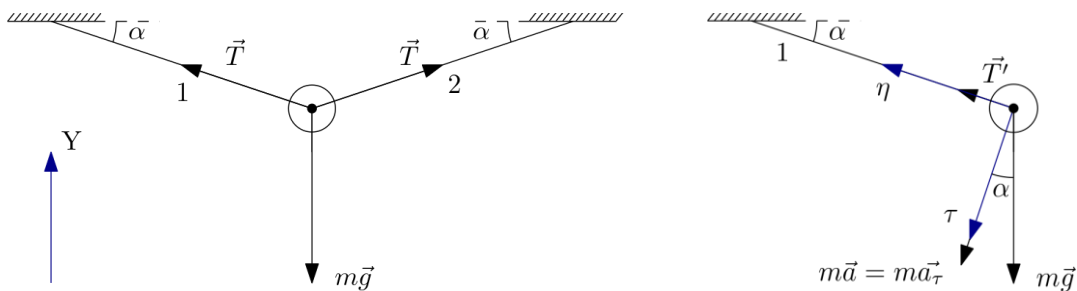


### Задача 3. Обрыв нити

Груз массой  $m$  подвешен на двух невесомых нерастяжимых нитях под одинаковым углом  $\alpha$ . В некоторый момент нить 2 обрывается. Найти нормальное и тангенциальное ускорение груза в момент обрыва. При каком угле  $\alpha$  сила натяжения нити 1 после обрыва будет меньше, чем до обрыва?



**Решение:**



Т.к. нити натянуты под одинаковым углом:

$$T_1 = T_2 = T.$$

Запишем условие равновесия в проекции на ось  $OY$ :

$$mg = T \sin \alpha + T \sin \alpha,$$

$$T = \frac{mg}{2 \sin \alpha}. \quad (1)$$

В момент обрыва нити скорость груза  $v = 0$ . Следовательно,

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0,$$

Откуда находим

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \vec{a}_\tau.$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $O\tau$  и  $O\eta$ :

$$O\tau: mg \cos \alpha = ma_\tau,$$

$$a_\tau = g \cos \alpha.$$

$$O\eta: T' - mg \sin \alpha = ma_n = 0,$$

$$T' = mg \sin \alpha. \quad (2)$$

В таком случае отношение сил натяжения нити выражается из уравнения (1) и (2) как:

$$\frac{T'}{T} = 2 \sin^2 \alpha,$$

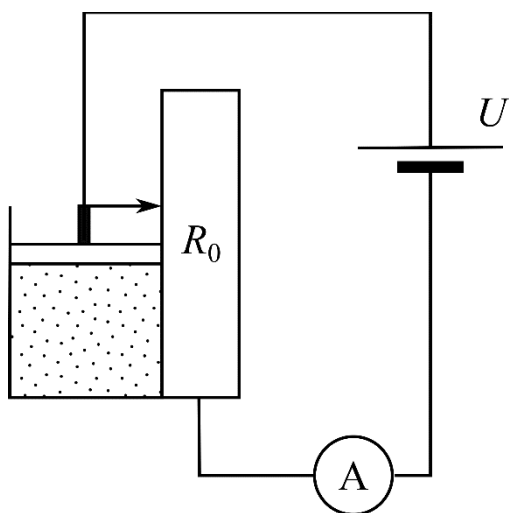
$$T' < T, \text{ когда } 2 \sin^2 \alpha < 1 \text{ или } \alpha < \arcsin\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$\alpha = -45^\circ$  не удовлетворяет условию. Следовательно:

$$T' < T, \text{ когда } \alpha < 45^\circ$$

#### Задание №4. Странный нагреватель

В установке, схема которой представлена на рисунке, источник с напряжением  $U = 30$  В соединён с реостатом, бегунок которого прикреплен к невесомому поршню площадью  $S = 0,03$  м<sup>2</sup>, находящемуся в сосуде с идеальным одноатомным газом в количестве  $\nu = 1$  моль. При подаче напряжения реостат начинает нагреваться, отдавая всё тепло сосуду с газом. Мощность потери тепла системой составляет  $P_{\text{пот}} = k(T - T_{\text{окр}})$ , где  $k = 3$  Вт/К,  $T_{\text{окр}}$  — температура окружающей среды. Через некоторое время ток в цепи перестал изменяться, при этом газ нагрелся на  $\Delta T = 30$  К. Найдите изменение сопротивления реостата  $\Delta R$  при нагревании на  $\Delta T$ , а также начальное сопротивление реостата  $R_0$ , если известно, что изменение сопротивления реостата на единицу длины  $\lambda = 10$  Ом/м. Атмосферное давление считать  $p = 10^5$  Па, универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}$ , начальная температура газа равнялась температуре окружающей среды.



#### Решение:

По первому началу термодинамики  $\Delta Q = \Delta U + A$ . Запишем выражения для работы  $A = p\Delta V$  и изменения внутренней энергии  $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$ . Получим

$$\Delta Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V$$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
 Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс

По уравнению Менделеева-Клапейрона  $pV = \nu RT$ , процесс изобарический, а значит:

$$\Delta Q = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + p \Delta V = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} p \Delta V$$

Распишем изменение объема через изменение высоты и площадь поршня  $\Delta V = S \Delta h$

$$\frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} p \Delta V = \frac{5}{2} p S \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{R \nu \Delta T}{p S}$$

Изменение сопротивления реостата на единицу длины можно представить в виде

$$\lambda = \frac{\Delta R}{\Delta h} \Rightarrow \Delta R = \lambda \Delta h, \text{ получим}$$

$$\Delta R = \lambda \frac{R \nu \Delta T}{p S}$$

Подставим численные значения параметров и получим

$$\Delta R = 10 \frac{\text{Ом}}{\text{м}} \frac{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} \cdot 1 \text{ моль} \cdot 30 \text{ К}}{10^5 \text{ Па} \cdot 0,03 \text{ м}^2} \approx 0,8 \text{ Ом}$$

Ток в цепи перестал меняться, а значит мощность нагрева сравнялась с мощностью потерь, то есть  $P_{\text{нагр}} = P_{\text{пот}}$ , через закон Джоуля-Ленца  $Q = I^2 R t \Rightarrow$

$$Q = \frac{U^2}{R} t \text{ и определение мощности } (P = \frac{Q}{t}) \text{ получим}$$

$$\frac{U^2}{R_0 + \Delta R} = k(T - T_{\text{окр}}) = k \Delta T$$

В ходе преобразований получим

$$R_0 = \frac{U^2}{k \Delta T} - \lambda \frac{R \nu \Delta T}{p S}$$

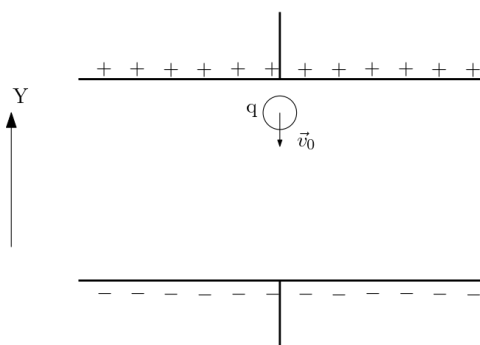
Подставим значение параметров и получим

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс

$$R_0 = \frac{(30 \text{ В})^2}{3 \frac{\text{Вт}}{\text{К}} \cdot 30 \text{ К}} - \frac{10 \frac{\text{Ом}}{\text{м}} \cdot 1 \text{ моль} \cdot 30 \text{ К} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{10^5 \text{ Па} \cdot 0,03 \text{ м}^2} \approx 9,2 \text{ Ом}$$

### Задача 5. Капля в конденсаторе

Маленькая капля масла с отрицательным зарядом  $q$  падает в воздухе со скоростью  $v_0$  в сторону нижней отрицательно заряженной пластины конденсатора. Камеру облучили рентгеновским излучением, из-за чего молекулы воздуха ионизировались, а заряд капельки изменился на  $\Delta q$ . Определите, в какой момент времени заряд капли изменился, а также значение  $\Delta q$  по данным зависимости проекции  $v_y$  скорости капли на ось  $Y$  от времени  $t$ . Сопротивлением воздуха и силой Архимеда пренебречь. Ускорение свободного падения принять  $10 \text{ м/с}^2$ . Электрическое поле конденсатора  $E = 400 \text{ кВ/м}$ . Масса капли  $m = 1 \text{ нг}$ .



$t, \text{ с}$	0	2	4	6	8	10
$v_y, \text{ м/с}$	-0,400	-0,304	-0,208	0,016	0,368	0,720

### Решение

Запишем второй закон Ньютона для капли до и после ионизации в проекции на ось  $OY$ :

$$ma_1 = qE - mg,$$

$$ma_2 = (q + \Delta q)E - mg.$$

Из данных уравнений получаем ускорения капли:

$$a_1 = \frac{E}{m}q - g,$$

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
 Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс

$$a_2 = \frac{E}{m}(q + \Delta q) - g.$$

Запишем уравнения скорости капли при равноускоренном движении до и после ионизации:

$$v = v_0 + at,$$

$$v_1 = \left(\frac{E}{m}q - g\right)t + v_0$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \left(\frac{E}{m}(q + \Delta q) - g\right)(t - t_{\text{ион}}) + v_1(t_{\text{ион}}) = \\ &= \left(\frac{E}{m}(q + \Delta q) - g\right)t + \left(v_1(t_{\text{ион}}) - \left(\frac{E}{m}(q + \Delta q) - g\right)t_{\text{ион}}\right) \end{aligned}$$

При равноускоренном движении скорость изменяется линейно:

$$v_1 = k_1 t + m_1$$

$$v_2 = k_2 t + m_2$$

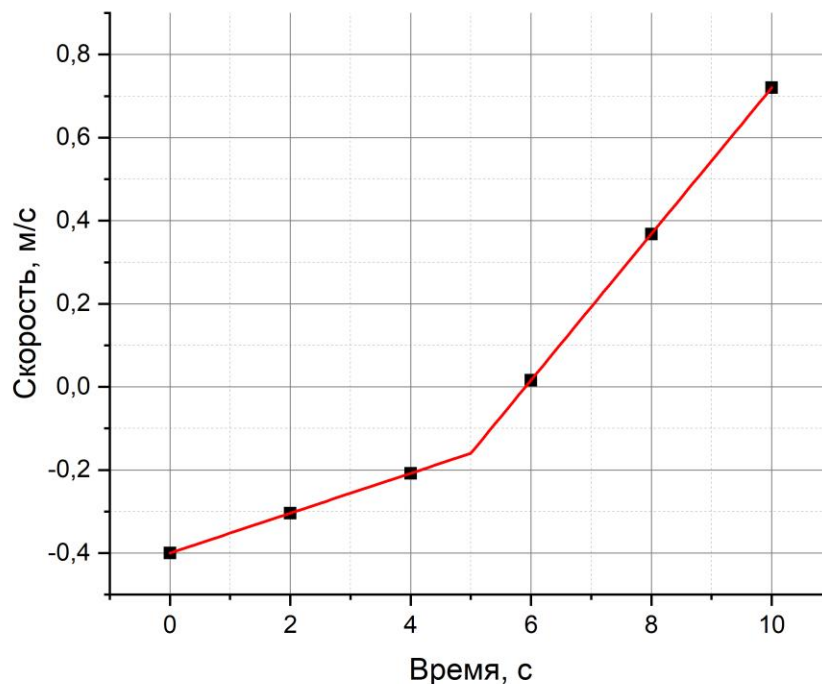
где  $k_1 = \frac{E}{m}q - g$ ,  $k_2 = \frac{E}{m}(q + \Delta q) - g$ ,  $m_1 = v_0$ ,  $m_2 = v_1(t_{\text{ион}}) - \left(\frac{E}{m}(q + \Delta q) - g\right)t_{\text{ион}}$ .

Тогда изменение заряда  $\Delta q$  можно определить из угловых коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  как

$$\Delta q = \frac{k_2 - k_1}{E} m$$

Построив график зависимости  $v = f(t)$  можно заметить, что две прямые пересекаются в точке  $t = t_{\text{ион}} = 5$  с.

Всероссийская олимпиада школьников по физике 2022/23  
Свердловская область, Муниципальный этап, 11 класс



Найдём коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  из линейной аппроксимации  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ :

$$k_1 = \frac{v_1(t_2 = 4 \text{ с}) - v_1(t_1 = 0)}{t_2 - t_1} = \frac{(-0,208 + 0,4) \frac{\text{м}}{\text{с}}}{4 \text{ с}} = 0,048 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$k_2 = \frac{v_2(t_4 = 10 \text{ с}) - v_2(t_3 = 6 \text{ с})}{t_4 - t_3} = \frac{(0,72 - 0,016) \frac{\text{м}}{\text{с}}}{(10 - 6) \text{ с}} = 0,176 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

В итоге получаем

$$\Delta q = \frac{k_2 - k_1}{E} m = \frac{(0,176 - 0,048) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{4 \times 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}}} 10^{-12} \text{ кг} = 3,2 \times 10^{-19} \text{ Кл.}$$